UNIVERSITE D'ABOMEY CALAVI
(BENIN)

THE ABDUS SALAM INTERNATIONAL CENTER FOR THEORETICAL PYSICS (ITALY)

INSTITUT DE MATHEMATIQUES ET DE SCIENCES PHYSIQUES

Mémoire de Master 2 :
Mathématiques fondamentales

Spécialité
Analyse

THÈME

Un résultat d'unicité pour les équations de transport et conservation avec diffusion

Superviseur :

Prof. Nicolas DEPAUW
Université De Nantes
EMAIL : nicolas.depauw@univ-nantes.fr

Soutenu par
ZODJI Sagbo Marcel

marcel.zodji@imsp-uac.org

Année Académique
2019-2020

DÉDICACES

je dédie ce travail à mes parents.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout d'abord mon encadreur, le Professeur Nicolas DEPAUW, pour m'avoir donné l'opportunité de travailler sur ce sujet très important en analyse, pour son grand soutien scientifique et moral, pour les conseils, les suggestions et les encouragements qu'il m'a apportés pendant l'élaboration de ce mémoire malgré ses multiples occupations. De simple remerciements ne suffiraient pas à montrer ma gratitude envers cet homme que je respecte et admire.

Je tiens à remercier l'ensemble du personnel de l'Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques pour leur efforts afin d'assurer une bonne rentrée académique chaque année. je remercie particulièrement le Directeur, Professeur Léonard TODJIHOUNDÉ, le Directeur Adjoint, Professeur Carlos OGOUYANDJOU, et le Coordonnateur du projet CEA-SMA et Responsable de ma formation, Professeur Joël TOSSA.

Je tiens à dire merci aux dirigeants du projet DAAD pour le soutien financier qu'ils m'ont apportés au cours de mes deux années de Master.

J'exprime ma gratitude à mon père Désiré ZODJI, à ma mère Clarisse MEKPOSSI, à mon grand frère Yves ZODJI , à Monsieur Albert HOUNNOU et sa femme ainsi qu'à ma cousine Rufine ATAYI. Votre soutien et vos encouragements sont à la base de mes accomplissements.

Enfin mes remerciements vont également à tous mes camarades, amis et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Les équations aux dérivées partielles constituent un objet d'étude de première importance aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées. Ceci est dû à leur utilité dans la construction des modèles mathématiques de processus d'évolution physiques et biologiques tels que la radioactivité, la mécanique céleste, la mécanique des fluides ou la dynamique des populations etc.

En mécanique des fluides, les équations de Navier Stokes sont des équations aux dérivées partielles non linéaires qui décrivent le mouvement des fluides newtoniens ; on s'intéresse à l'évolution au cours du temps d'un fluide, via l'étude de son champ de vitesses en tout point de l'espace et à chaque instant et on suppose que le fluide est à densité ρ constante, qu'il est incompressible i.e l'espace occupé par une quantité de fluide à chaque instant peut changer de forme mais pas de volume, et l'on supposera suivant les cas qu'il est visqueux ou non. Dans le cas d'une viscosité ν strictement positive, il s'agira d'un fluide obéissant aux équations de Navier-Stokes, alors que si la viscosité est nulle il s'agira des Équation d'Euler.

Le champ de vitesses (inconnu) du fluide est un vecteur à d coordonnées en dimension d d'espace, dépendant du temps $t \geqslant 0$ et de la variable d'espace $x \in \mathbb{R}^d$. L'incompressibilité du fluide se traduit par le fait que ce champ est de divergence nulle pour tout temps. Les équations de Navier-Stokes s'écrivent alors

$$\begin{cases} \rho(\partial_t u + u \cdot \nabla u) - \mu \Delta u = -\nabla \widetilde{p} + \widetilde{f}, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases}$$

Dans ce système u est le champ de vitesses du fluide, $\widetilde{p}$ est sa pression et $\widetilde{f}$ représente l'ensemble des forces extérieures agissant sur le fluide. Notons que

$$u \cdot \nabla u = \sum_{j=1}^{d} u_j \partial_j u$$

où $u = (u^1, \ldots, u^d)$. Comme ρ est constant, on peut redéfinir une viscosité cinématique $\nu := \dfrac{\mu}{\rho}$, une nouvelle pression $p := \dfrac{\widetilde{p}}{\rho}$ et une nouvelle force source $f := \dfrac{\widetilde{f}}{\rho}$ pour obtenir les équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u = -\nabla p + f, \\ \operatorname{div} u = 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Notons que si le fluide est supposé évoluer dans un domaine $\mathcal{O}$, il convient de rajouter des conditions aux limites à ce système, par exemple les conditions de non glissement $u_{|\partial\mathcal{O}} = 0$. Pour simplifier l'exposition nous supposons que les forces extérieures sont nulles.

La présence du terme $-\nabla p$ dans le membre de droite de (1.1) assure que la divergence de u reste nulle au cours du temps : en prenant la divergence de la première équation dans (1.1), on s'aperçoit en effet sans peine que la pression est reliée au champ de vitesses par l'équation de Poisson

$$-\Delta p = \operatorname{div}(u \cdot \nabla u) \tag{1.2}$$

qui peut-être résolue par exemple de la manière suivante : on remarque que

$$u \cdot \nabla u = \sum_{j=1}^{d} \partial_j (u_j u),$$

du fait de l'incompressibilté. Dès lors (1.2) peut s'écrire aussi

$$-\Delta p = \sum_{j,k} \partial_j \partial_k (u_j u_k)$$

ou encore

$$p = (-\Delta)^{-1} \sum_{j,k} \partial_j \partial_k (u_j u_k)$$

Nous pouvons alors définir le projeteur de Laray

$$\mathbf{P} = Id + \nabla(-\Delta)^{-1} \operatorname{div}$$

et considérer le système suivant, qui est équivalent à (1.1) et qui ne porte que sur le champ de vitesses (de divergence nulle)

$$\partial_t u + \mathbf{P}(u \cdot \nabla u) - \nu \Delta u = 0.$$

Une quantité joue un rôle fondamental dans la description du mouvement d'un fluide : il s'agit du *tourbillon*, qui n'est rien d'autre que le rotationnel du champ de vitesses. Si nous prenons le rotationnel de l'équation de Navier-Stokes , une façon d'éliminer le gradient de la pression de l'équation, on obtient l'équation de tourbillon

$$\partial_t \Omega + u \cdot \nabla \Omega - \nu \Delta \Omega = \Omega \cdot \nabla u.$$

En dimension 2 d'espace, cette équation se simplifie en l'équation de transport-diffusion suivante

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega - \nu \Delta \omega = 0.$$

Dans [Slmd34], Jean Leray montre que si $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $\operatorname{div} u_0 = 0$ alors il existe une solution u des équations de Navier-Stokes associée à la condition initiale u_0, et

$$u \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^d)) \cap L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^d))$$

où la norme dans $\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)$ est définie par

$$\|u\|_{\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)} = \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

De plus la solution vérifie

$$\forall t \geqslant 0, \quad \frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \int_0^t \|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} ds \leqslant \frac{1}{2}\|u_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Dans leur article fondateur [DL89], DiPerna et Lions ont montré l'existence et l'unicité de solutions des équations de transport sur $\mathbb{R}^d$. Nous rappelons ici une version légèrement simplifiée de leur déclaration.

Théorème 1.0.1 (DiPerna & Lions). *Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et p' son conjugué de Hölder. Soit $a_0 \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, \dot{W}^{1,p'}(\mathbb{R}^d))$.*

Alors il existe une unique solution faible a dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R}^d))$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t a + \nabla \cdot (av) = 0, \\ a(0) = a_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

où la condition initiale est au sens de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d))$.

Après ce théorème, de nombreux auteurs ont prouvé des théorèmes d'existence et de (non-) unicité similaires (voir par exemple, [L.04, AC08, BJ98, BdLSV19, CKN82, CZ16, BJ99] et [Dep03, LFX93, Ler04, LBL08]). En particulier, les articles [BJM05, BJ98, BJ99] utilisent la méthode de dualité qui est proche de l'esprit de nos résultats.

Dans [Lév16], Guillaume Levy a considéré l'équation de transport-diffusion où le champ de vecteur est peu régulier et a montré l'unicité de solution dans $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$, puis dans [Lév20], il étend le résultat précédent, ce qui lui permet de donner une nouvelle preuve du théorème de Serrin (1962). Notre objectif est de présenter ces deux travaux de Guillaume Lévy.

CHAPITRE 2

UNICITÉ D'UNE ÉQUATION DE TRANSPORT À COEFFICIENT PEU RÉGULIER

Dans cette section nous exposons l'article [Lév16] de Guillaume Lévy.

Étant donné l'équation de transport-diffusion

$$\begin{cases} \partial_t a + \nabla \cdot (va) - \Delta a = 0, \\ a(0) = 0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $v \in L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ est un champ de vecteur de divergence nulle.

S'il existe une solution de (2.1) dans $L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$, alors elle est unique.

2.1 Énoncé

Théorème 2.1.1. *Soit $v \in L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ un champ de vecteur de divergence nulle et $a \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$. Supposons que a est solution au sens des distributions du problème de Cauchy (2.1) où la condition initiale est au sens des distributions.*

Alors a est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$.

Remarque 2.1.1. *L'hypothèse faite sur a et v entraîne que $\partial_t a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+, H^{-2}(\mathbb{R}^3))$ et donc en particulier $a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3))$.*

Dans ce théorème, on voit a comme une composante scalaire du tourbillon de v qui est une solution de Leray des équations de Navier-Stokes. En comparant l'équation (2.1) à l'équation du tourbillon sur $\mathbb{R}^3$, on constate qu'il manque le terme $a\partial_i v$.

Le théorème II.2 du célèbre article DiPerna & Lions (1989) [DL89] fournit lui aussi un résultat d'unicité pour les équations de transport dans la classe de fonctions $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R}^d))$, il faut noter que les conditions sur a n'implique pas que $a \in L^\infty(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R}^d))$ pour un certain $p \geqslant 1$.

A cause de la faible régularité du champ de vecteur v et de a, l'utilisation de l'estimation de type énergie semble être difficile. C'est pour cette raison nous comptons plutôt sur un argument de dualité, incarné par le théorème suivant.

Théorème 2.1.2 (Théorème d'existence). *Soit $v \in L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ un champ de vecteur de divergence nulle et $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Alors il existe une solution au sens des distributions du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t \varphi - v \cdot \nabla \varphi - \Delta \varphi = 0, \\ \varphi(0) = \varphi_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

satisfaisant :

$$\|\varphi(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\varphi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}; \tag{2.3}$$

$$\|\partial_j\varphi(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_0^t \|\nabla\partial_j\varphi(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\partial_j\varphi_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\varphi_0\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}\|\partial_j v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)}, \tag{2.4}$$

pour $j \in \{1,2,3\}$ *et pour* $t > 0$.

Avant de donner une preuve au théorème principal, commençons par démontrer le théorème 2.1.2.

2.2 Preuve du théorème d'existence

2.2.1 Régularisation du problème

Soit $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$ tel que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} \rho(t,x)dtdx = 1$, on régularise v par convolution en temps et en espace. $\forall \delta > 0$ on pose

$$v^\delta := \rho_\delta * v \text{ où } \rho_\delta := \delta^{-4}\left(\frac{t}{\delta}, \frac{x}{\delta}\right).$$

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t\varphi - v^\delta \cdot \nabla\varphi - \Delta\varphi = 0, \\ \varphi(0) = \varphi_0. \end{cases} \tag{2.5}$$

En se référant à Annexe 1 p. 44, (2.5) a une unique solution φ^δ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, W^{m,p}(\mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, W^{m-2,p}(\mathbb{R}^3))$ pour tous $m, p \geqslant 1$. Nous passons maintenant aux estimations uniformes par rapport au paramètre de régularisation.

2.2.2 Estimations uniformes

Soit $p \geqslant 2$.

En multipliant l'équation (2.5) satisfaite par φ^δ par $\varphi^\delta|\varphi^\delta|^{p-2}$ on obtient :

$$\varphi^\delta|\varphi^\delta|^{p-2}\partial_t\varphi^\delta - \varphi^\delta|\varphi^\delta|^{p-2}\left(v^\delta \cdot \nabla\varphi^\delta\right) - \varphi^\delta|\varphi^\delta|^{p-2}\Delta\varphi^\delta = 0. \tag{2.6}$$

Puisque $\varphi^\delta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, W^{2,p}(\mathbb{R}^3))$ au moins, alors la relation précédente devient

$$\partial_t\left\{\frac{1}{p}|\varphi^\delta|^p\right\} - \frac{1}{p}v^\delta \cdot \nabla\left\{|\varphi^\delta|^p\right\} - \varphi^\delta|\varphi^\delta|^{p-2}\Delta\varphi^\delta = 0. \tag{2.7}$$

On a d'une part :

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t\left\{\frac{1}{p}|\varphi^\delta|^p\right\} = \frac{1}{p}\left\{\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi^\delta(t)|^p - |\varphi_0|^p\right\} = \frac{1}{p}\left\{\|\varphi(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} - \|\varphi_0\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)}\right\}. \tag{2.8}$$

Par hypothèse $v \in L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ et d'après les injections de Sobolev, $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$ et donc pour presque tout $s \in \mathbb{R}_+$ $v(s) \in L^6(\mathbb{R}^3)$ et $\rho_\delta \in L^{\frac{6}{5}}(\mathbb{R}^3)$ au moins, donc par les propriétés du produit de convolution, $v^\delta(s) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^3)$.

De même pour presque tout $s \in \mathbb{R}_+$ $\varphi^\delta(s) \in W^{1,4}(\mathbb{R}^3)$ donc d'après la [Bre10, p.283 remarque 12] qui n'est qu'une conséquence du théorème de Morrey, $\lim_{|x|\to\infty} |\nabla\varphi^\delta(s,x)| = 0$ et $\lim_{|x|\to\infty} |\varphi^\delta(s,x)| = 0$. Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{p} v^\delta(s) \cdot \nabla \left\{|\varphi^\delta(s)|^p\right\} = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} v_j^\delta(s)\partial_j|\varphi^\delta(s)|^p = -\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} \partial_j v_j^\delta(s)|\varphi^\delta(s)|^p$$
$$= -\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^3} |\varphi^\delta(s)|^p \operatorname{div} v^\delta(s) \overset{\operatorname{div} v^\delta = 0}{=} 0. \quad (2.9)$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi^\delta|\varphi^\delta|^{p-2}\Delta\varphi^\delta = -\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\left\{\varphi^\delta|\varphi^\delta|^{p-2}\right\}\cdot\nabla\varphi^\delta = (1-p)\int_{\mathbb{R}^3} \|\nabla\varphi^\delta\|^2|\varphi^\delta|^{p-2},$$

$$\int_{\mathbb{R}^3} \varphi^\delta|\varphi^\delta|^{p-2}\Delta\varphi^\delta = (1-p)\left\|\nabla\varphi^\delta(s)|\varphi^\delta(s)|^{\frac{p-2}{2}}\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \quad (2.10)$$

Soit $t > 0$.
En intégrant (2.6) sur $[0,t]\times\mathbb{R}^3$ et en utilisant les relations (2.8) ,(2.9) et (2.10) on obtient :

$$\frac{1}{p}\|\varphi^\delta(t)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)} + (p-1)\int_0^t \|\nabla\varphi^\delta(s)|\varphi^\delta(s)|^{\frac{p-2}{2}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^2)}ds = \frac{1}{p}\|\varphi_0\|^p_{L^p(\mathbb{R}^3)}.$$

Ainsi

$$\|\varphi^\delta(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\varphi_0\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \quad \forall p \geqslant 2.$$

On conclut que

$$\|\varphi^\delta(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\varphi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}. \quad (2.11)$$

Rappelons que $\forall t > 0$,

$$\varphi^\delta(t) \in W^{3,p}(\text{ au moins }) \text{ et } v^\delta(t) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3).$$

On peut dériver l'équation (2.6) satisfaite par φ^δ par rapport à $j \in \{1,2,3\}$ et on obtient,

$$\partial_t\partial_j\varphi^\delta - v^\delta\cdot\nabla\partial_j\varphi^\delta - \Delta\partial_j\varphi^\delta = \partial_j v^\delta\cdot\nabla\varphi^\delta. \quad (2.12)$$

En multipliant (2.12) par $\partial_j\varphi^\delta$, on a :

$$\partial_t|\partial_j\varphi^\delta|^2 - v^\delta\cdot\left\{\partial_j\varphi^\delta\nabla\partial_j\varphi^\delta\right\} - \partial_j\varphi^\delta\Delta\partial_j\varphi^\delta = \partial_j\varphi^\delta\left\{\partial_j v^\delta\cdot\nabla\varphi^\delta\right\}. \quad (2.13)$$

Pour tout $t > 0$ on a d'une part :

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t|\partial_j\varphi^\delta|^2 = \frac{1}{2}\left\{\|\partial_j\varphi^\delta(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} - \|\partial_j\varphi_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right\}. \quad (2.14)$$

D'autres part parce que v^δ tend vers 0 à l'infini ainsi que $\partial_j\varphi^\delta(s)$, $\nabla\partial_j\varphi^\delta(s)$ et $\Delta\varphi^\delta(s)$.

$$\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} v^\delta\cdot\{\partial_j\varphi^\delta\nabla\partial_j\varphi^\delta\} = \frac{1}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3} v^\delta\cdot\nabla|\partial_j\varphi^\delta|^2 \overset{(2.9)}{=} -\frac{1}{2}\int_0^t\int_{\mathbb{R}^3}|\partial_j\varphi^\delta|^2\operatorname{div} v^\delta \overset{\operatorname{div} v^\delta=0}{=} 0; \quad (2.15)$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \partial_j \varphi^\delta \Delta \partial_j \varphi^\delta = - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \|\nabla \partial_j \varphi^\delta\|^2 = - \int_0^t \|\nabla \partial_j \varphi^\delta\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.16}$$

Ainsi en intégration (2.13) sur $[0, t] \times \mathbb{R}^3$ et en se servant des relations (2.14), (2.15) et (2.16) on a :

$$\frac{1}{2}\|\partial_j \varphi^\delta(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_0^t \|\nabla \partial_j \varphi^\delta\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \frac{1}{2}\|\partial_j \varphi_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \partial_j \varphi^\delta \left\{\partial_j v^\delta \cdot \nabla \varphi^\delta\right\}. \tag{2.17}$$

Posons

$$I(t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \partial_j \varphi^\delta \left\{\partial_j v^\delta \cdot \nabla \varphi^\delta\right\}.$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}_+$, $\varphi^\delta(s), \partial_j \varphi^\delta$ et $v^\delta(s)$ tendent vers 0 à l'infini, ce qui permet d'avoir :

$$\begin{aligned}
I(t) &= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \varphi^\delta \operatorname{div}\{\partial_j v^\delta \partial_j \varphi^\delta\} \\
&= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \varphi^\delta \{\partial_j v^\delta \cdot \nabla \partial_j \varphi^\delta + \partial_j \varphi^\delta \operatorname{div} \partial_j v^\delta\} \\
&= - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \varphi^\delta \{\partial_j v^\delta \cdot \nabla \partial_j \varphi^\delta\} - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \partial_j \varphi^\delta \partial_j \operatorname{div} v^\delta \\
&\overset{\operatorname{div} v^\delta = 0}{=} - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \varphi^\delta \partial_j v^\delta \cdot \nabla \partial_j \varphi^\delta \\
&\leqslant \|\varphi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \int_0^t \|\partial_j v^\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \|\nabla \partial_j \varphi^\delta\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|\varphi_0\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \int_0^t \|\partial_j v^\delta\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \frac{1}{2} \int_0^t \|\nabla \partial_j \varphi^\delta\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.
\end{aligned}$$

Ainsi (2.17) devient

$$\|\partial_j \varphi^\delta(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_0^t \|\nabla \partial_j \varphi^\delta\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\partial_j \varphi_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\varphi_0\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \int_0^t \|\partial_j v^\delta\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Autrement dit

$$\|\partial_j \varphi^\delta(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \int_0^t \|\nabla \partial_j \varphi^\delta(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\partial_j \varphi_0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)} + \|\varphi_0\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|\partial_j v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)}. \tag{2.18}$$

car

$$\|\partial_j v^\delta\|_{L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)} \leqslant \|\rho_\delta\|_{L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)} \|\partial_j v\|_{L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)} = \|\partial_j v\|_{L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)}.$$

On résume cette partie par deux estimations :

— La relation (2.11) permet d'écrire

$$\sup_\delta \|\varphi^\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)} \leqslant \|\varphi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}. \tag{2.19}$$

— De même la relation (2.18) permet décrire

$$\sup_\delta \|\varphi^\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))} < \infty \text{ et } \sup_\delta \|\varphi^\delta\|_{L^2(\mathbb{R}_+, H^2(\mathbb{R}^3))} < \infty.$$

2.2.3 Convergences

Les deux dernières estimations de la partie précédente permettent de conclure que la famille $\left(\varphi^\delta\right)_\delta$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)\cap L^2(\mathbb{R}_+,H^2(\mathbb{R}^3)\cap L^\infty(\mathbb{R}_+,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$. Rappelons que $L^2(\mathbb{R}_+,H^2(\mathbb{R}^3)$ est réflexif et $L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)$ et $L^\infty(\mathbb{R}_+,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ sont les espaces duaux respectifs de $L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)$ et $L^1(\mathbb{R}_+,\dot{H}^{-1}(\mathbb{R}^3))$. Ainsi d'après le théorème de Kakutani [Bre10, Théorème 3.17], il existe une sous-famille de $\left(\varphi^\delta\right)_\delta$ qui convergence faiblement dans $L^2(\mathbb{R}_+,H^2(\mathbb{R}^3))$. En utilisant le théorème de Banach-Alaoglu Bourbaki [Bre10, Théorème 3.16], il existe une sous-famille de $\left(\varphi^\delta\right)_\delta$ qui converge faiblement$\star$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ et dans $L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)$.

En conclusion, il existe une sous-famille de $\left(\varphi^\delta\right)_\delta$ que nous omettons de noter qui converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R}_+,H^2(\mathbb{R}^3))$ et faiblement$\star$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)$ et $L^\infty(\mathbb{R}_+,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ vers φ et on a :

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)}\leqslant\liminf_\delta\|\varphi^\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)},$$

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))}\leqslant\liminf_\delta\|\varphi^\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))}\text{ et }\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R}_+,H^2(\mathbb{R}^3))}\leqslant\liminf_\delta\|\varphi^\delta\|_{L^2(\mathbb{R}_+,H^2(\mathbb{R}^3))}.$$

Ce qui permet d'obtenir grâce à (2.18) et (2.11) les relations (2.3) (2.4).

Il reste à montrer que φ est solution faible de (2.2).

D'après ce qui précède, $(\varphi^\delta)_\delta$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}_+,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ et dans $L^2(\mathbb{R}_+,H^2(\mathbb{R}^3))$. Par interpolation, on obtient que $(\varphi^\delta)_\delta$ est bornée dans $L^4(\mathbb{R}_+,H^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3)$, c'est-à-dire que $(\nabla\varphi^\delta)_\delta$ est bornée dans $L^4(\mathbb{R}_+,\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+)$. Donc à extraction près, $(\nabla\varphi^\delta)_\delta$ converge faiblement vers $\nabla\varphi$ dans $L^4(\mathbb{R}_+,\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}_+))$.

D'autre part, $(\rho_\delta)_\delta$ est une approximation de l'unité et $v\in L^2(\mathbb{R}_+,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ donc $(v^\delta=\rho_\delta * v)_\delta$ converge fortement vers v dans $L^2(\mathbb{R}_+,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$.

Puisque $\varphi^\delta\rightharpoonup\varphi$ dans $L^2(\mathbb{R}_+,H^2(\mathbb{R}_+))$ alors $\Delta\varphi^\delta\rightharpoonup\Delta\varphi$ dans $L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)$.

Montrons que $v^\delta\cdot\nabla\varphi^\delta$ converge faiblement dans $L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}_+,L^2(\mathbb{R}^3))$ vers $v\cdot\varphi$.

Pour garantir la convergence faible de $v^\delta\cdot\nabla\varphi^\delta$ vers $v\cdot\varphi$, il suffit que φ^δ converge faiblement vers φ et v^δ converge fortement vers v. D'après ce qui précède $(\nabla\varphi^\delta)_\delta$ converge faiblement vers φ dans $L^4(\mathbb{R}_+,\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3))$.

Par injection de Sobolev $\dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow L^3(\mathbb{R}^3)$ et $\dot{H}^1(\mathbb{R}^3)\hookrightarrow L^6(\mathbb{R}^3)$. Donc $(\nabla\varphi^\delta)_\delta$ est faiblement convergente dans $L^4(\mathbb{R}_+,L^3(\mathbb{R}^3))$. Or (v^δ) est fortement convergente dans $L^2(\mathbb{R}_+,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ donc aussi $L^2(\mathbb{R}_+,L^6(\mathbb{R}^3))$. Par Hölder, on conclut que $v^\delta\cdot\nabla\varphi^\delta$ converge faiblement dans $L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}_+,L^2(\mathbb{R}^3))$ vers $v\cdot\varphi$.

Par hypothèse $(\varphi^\delta)_\delta$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}_+,H^2(\mathbb{R}^3))$ et $(\nabla\varphi^\delta)_\delta$ est bornée dans $L^4(\mathbb{R}_+,\dot{H}^{\frac{1}{2}})$ donc $(\Delta\varphi^\delta)_\delta$ est borné dans $L^2(\mathbb{R}_+,L^2(\mathbb{R}^3))\cap L^4(\mathbb{R}_+,\dot{H}^{-\frac{1}{2}})$. Par interpolation on a que $(\Delta\varphi^\delta)_\delta$ est bornée dans $L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}_+,L^2(\mathbb{R}^3))$. Par l'équation, $\partial_t\varphi^\delta=v^\delta\cdot\varphi^\delta+\Delta\varphi^\delta$ donc $(\partial_t\varphi^\delta)_\delta$ est une suite de $L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}_+,L^2(\mathbb{R}^3))$.

Par ailleurs, pour tout $u\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+\times L^2(\mathbb{R}^3))$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_t\varphi^\delta u=-\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3}\varphi^\delta\partial_t u\xrightarrow{\delta\to 0}-\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3}\varphi\partial_t u=\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_t\varphi u.$$

Ainsi $\partial_t\varphi^\delta\rightharpoonup\partial_t\varphi$ dans $L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}_+,L^2(\mathbb{R}^3))$.

La convergence au sens des distributions étant une convergence très faible, elle est impliquée par les convergences forte et faible.

Conclusion

Pour tout $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \varphi^\delta u \xrightarrow{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \varphi u \text{ car } \partial_t \varphi^\delta \rightharpoonup \partial_t \varphi \text{ dans } L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3));$$
$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} v^\delta \cdot \nabla \varphi^\delta u \xrightarrow{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} v \cdot \nabla \varphi u \text{ car } v^\delta \cdot \nabla \varphi^\delta \rightharpoonup v \cdot \nabla \varphi \text{ dans } L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3));$$
$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} \Delta \varphi^\delta u \xrightarrow{\delta \to 0} \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} \Delta \varphi u \text{ car } \varphi^\delta \rightharpoonup \Delta \varphi \text{ dans } L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$$

or

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \varphi^\delta u + \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} v^\delta \cdot \nabla \varphi^\delta u - \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} \Delta \varphi^\delta u = 0$$

alors φ vérifie la relation

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} \partial_t \varphi u + \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} v \cdot \nabla \varphi u - \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} \Delta \varphi u = 0 \quad \forall u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3).$$

$\forall \delta > 0,\ \varphi^\delta(0) = \varphi_0$ donc en passant à la limite on a $\varphi(0) = \varphi_0$.

Ceci achève la preuve du théorème (2.1.2).

Le résultat suivant est une conséquence directe de ce théorème.

Corollaire 2.2.1. *Soit $T > 0$, $v \in L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ un champ de vecteur de divergence nulle alors le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - v \cdot \nabla \varphi - \Delta \varphi = 0 \\ \varphi(T) = \varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \end{cases}$$

admet une solution sur $[0, T] \times \mathbb{R}^3$ et vérifie les relations (2.3) et (2.4).

2.3 Preuve du théorème principal

La preuve du théorème 2.1.1 est une conséquence directe du lemme suivant.

2.3.1 Lemme de commutateur

Lemme 2.3.1. *Soit un champ de vecteur à divergence nulle $v \in L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$ donné. Soit $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$, $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$ tel que le support de ρ soit contenu dans la boule unité de $\mathbb{R}^3$. On définit :*

1. $\rho_\varepsilon := \varepsilon^{-3}\rho(\frac{\cdot}{\varepsilon})$;
2. *Commutateur C^ε par :*

$$C^\varepsilon(s, x) = v(s, x) \cdot (\nabla \rho_\varepsilon * \varphi(s))(x) - (\nabla \rho_\varepsilon * (v(s)\varphi(s)))(x)$$

.

Alors

$$\|C^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)} \leqslant \||\cdot|\nabla \rho\|_{L^1(\mathbb{R}^3)} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))} \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)}.$$

Ce qui est très remarquable et qui sera utilisé plus tard est que le majorant de la norme de C^ε ne dépend pas de ε

Démonstration.

$$
\begin{aligned}
C^{\varepsilon}(s,x) &= \sum_{j=1}^{3} v_j(s,x)\cdot\left(\partial_j\rho_\varepsilon \star \varphi(s)\right)(x) - \int_{\mathbb{R}^3}\nabla\rho_\varepsilon(x-y)\cdot(v(s)\varphi(s))(y)dy \\
&= \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\left(v_j(s,x)\partial_j\rho_\varepsilon(x-y)\varphi(s,y) - \partial_j\rho_\varepsilon(x-y)v_j(s,y)\varphi(s,y)\right)dy \\
&= \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_j\rho_\varepsilon(x-y)\left(v_j(s,x)-v_j(s,y)\right)\varphi(s,y)dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^4}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_j\rho\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)\left(v_j(s,x)-v_j(s,y)\right)\varphi(s,y)dy.
\end{aligned}
$$

En faisant le changement de variable $y = x-\varepsilon z$ et ensuite parceque

$$
v(s,x-\varepsilon z) - v(s,x) = \varepsilon z\int_0^1\nabla v(s,x-t\varepsilon z)dt.
$$

on a :

$$
\begin{aligned}
C^{\varepsilon}(s,x) &= \frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3}\partial_j\rho(z)\left(v_j(s,x)-v_j(s,x-\varepsilon z)\right)\varphi(s,x-\varepsilon z)dz \\
&= \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^3}\nabla\rho(z)\cdot\left(v(s,x)-v(s,x-\varepsilon z)\right)\varphi(s,x-\varepsilon z)dz \\
&= \int_0^1\int_{\mathbb{R}^3}\varphi(s,x-\varepsilon z)\nabla v(s,x-t\varepsilon z) : (\nabla\rho(z)\otimes z)dzdt \\
|C^{\varepsilon}(s,x)| &\leqslant \int_0^1\int_{\mathbb{R}^3}|\varphi(s,x-\varepsilon z)|\left[|\nabla\rho(z)||z|\right]^{\frac{1}{2}}|\nabla v(s,x-t\varepsilon z)|\left[|\nabla\rho(z)||z|\right]^{\frac{1}{2}}dzdt \\
&\leqslant \int_0^1\left[\int_{\mathbb{R}^3}|\varphi(s,x-\varepsilon z)|^2|\nabla\rho(z)||z|dz\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v(s,x-t\varepsilon z)|^2|\nabla\rho(z)||z|dz\right]^{\frac{1}{2}}dt \\
|C^{\varepsilon(s,x)}|^2 &\leqslant \|\varphi\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)}\||\cdot|\nabla\rho\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^3}|\nabla v(s,x-t\varepsilon z)|^2|\nabla\rho(z)||z|dzdt \\
\|C^{\varepsilon}\|^2_{L^2\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3} &\leqslant \|\varphi\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)}\||\cdot|\nabla\rho\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla v(s,x-t\varepsilon z)|^2dx|\nabla\rho(z)|dsdzdt \\
&\leqslant \|\varphi\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)}\||\cdot|\nabla\rho\|^2_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)}\|\nabla v\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)}
\end{aligned}
$$

Ce qui permet d'avoir le résultat. □

2.3.2 Opérateur de convolution

Avant de continuer, introduisons l'opérateur de convolution R_ε définie par :

$$
R_\varepsilon\colon u \mapsto \rho_\varepsilon * u.
$$

Lemme 2.3.2. *1. R_ε commute avec l'opérateur ∇ :*

$$
R_\varepsilon(\nabla f) = \nabla(R_\varepsilon f).
$$

2. R_ε est "symétrique" pour signifier que :

$$\int_{\mathbb{R}^3} R_\varepsilon(f)(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^3} R_\varepsilon(g)(x)f(x)dx.$$

3. ∇ est "antisymétrique" pour signifier que : pour tout champ de vecteur $v \in \dot{H}^1(\mathbb{R}^3)$

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\nabla \cdot v(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^3} v(x)\cdot \nabla f(x)dx.$$

Démonstration. 1.

$$R_\varepsilon(\nabla f) = \rho_\varepsilon * \nabla f = \nabla(\rho_\varepsilon * f) = \nabla R_\varepsilon f.$$

2.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} R_\varepsilon(f)(x)g(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \rho_\varepsilon * f(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3} f(y)\rho_\varepsilon(x-y)g(x)dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho_\varepsilon(x-y)g(x)dx\right)dy \overset{\rho \text{ radiale}}{=} \int_{\mathbb{R}^3} f(y)\left(\int_{\mathbb{R}^3} \rho_\varepsilon(y-x)g(x)dx\right)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f(y)\rho_\varepsilon * g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^3} f(y)R_\varepsilon(g)(y)dy.\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\nabla\cdot v(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^3} f(x)\sum_{j=1}^{3}\partial_j v_j(x)dx = \sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} f(x)\partial_j v_j(x)dx \\ &= -\sum_{j=1}^{3}\int_{\mathbb{R}^3} v_j(x)\partial_j f(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^3} v(x)\cdot\nabla f(x)dx.\end{aligned}$$ □

2.3.3 Préliminaires

Soit $\rho = \rho(x)$ une fonction régularisante radiale, définissons $\rho_\varepsilon := \varepsilon^{-3}\rho(\frac{\cdot}{\varepsilon})$. $\forall \varepsilon > 0$ posons $a_\varepsilon = a * \rho_\varepsilon$ la convolution en espace de a et ρ_ε.

On a :

$$\begin{aligned}\partial_t a_\varepsilon &= \rho_\varepsilon * \partial_t a, \\ \Delta a_\varepsilon &= \rho_\varepsilon * \Delta a.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\partial_t a_\varepsilon + \nabla\cdot(a_\varepsilon v) - \Delta a_\varepsilon = \rho_\varepsilon * (\partial_t a - \Delta a) + \nabla\cdot(a_\varepsilon v) = \nabla\cdot(a_\varepsilon v) - \rho_\varepsilon * \nabla\cdot(av)\,. \tag{2.20}$$

Remarquons que la fonction a_ε n'est pas suffisamment régulière en temps car elle est obtenue par convolution en espace. Néanmoins puisque $a \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3)$ alors $a_\varepsilon \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3))$ et $\partial_t a_\varepsilon \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3))$ car $\partial_t a \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+, H^{-2}(\mathbb{R}^3))$.

Soit $T > 0$, considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} -\partial_t\varphi - v^\delta\cdot\nabla\varphi - \Delta\varphi = 0, \\ \varphi(T) = \varphi_T, \end{cases} \tag{2.21}$$

où v^δ est la convolé en espace du champ de vecteur de divergence nulle v par ρ_δ et $\varphi_T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$.

D'après la méthode illustrée dans Annexe 1 p.44, il existe une unique solution φ^δ de (2.21) appartenant à $\mathcal{C}([0,T], W^{m,p}(\mathbb{R}^3)) \cap \mathcal{C}^1((0,T), W^{m-2,p}(\mathbb{R}^3))$ pour tous $m, p \geqslant 1$.

De plus la famille $(\varphi^\delta)_\delta$ est bornée dans $\left(\varphi^\delta\right)_\delta$ est bornée dans $L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^3) \cap L^2([0,T], \dot{H}^2(\mathbb{R}^3) \cap L^\infty([0,T], \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ et sa limite faible est solution au sens des distributions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - v \cdot \nabla \varphi - \Delta \varphi = 0, \\ \varphi(T) = \varphi_T. \end{cases}$$

Multiplions la relation (2.20) par φ^δ, on a :

$$\varphi^\delta \partial_t a_\varepsilon + \varphi^\delta \nabla \cdot (a_\varepsilon v) - \varphi^\delta \Delta a_\varepsilon = \varphi^\delta \nabla \cdot (a_\varepsilon v) - \varphi^\delta \rho_\varepsilon * \nabla \cdot (av) \,.$$

D'une part, $\forall t \geqslant 0 \quad \lim\limits_{|x|\to\infty} |\varphi^\delta(t,x)| = \lim\limits_{|x|\to\infty} |a_\varepsilon(t,x)| = 0$ ($a_\varepsilon = a * \rho_\varepsilon$ et ρ_ε est à support compact).

Par intégration par partie, on a :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t a_\varepsilon(s,x) \varphi^\delta(s,x) dsdx = \langle a_\varepsilon(T), \varphi(T) \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3),\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} - \langle a_\varepsilon(0), \varphi(T) \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3),\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} a_\varepsilon(s,x) \partial_t \varphi^\delta(s,x) dsdx.$$

Par hypothèse $a_\varepsilon(0) = a(0) = 0$ au sens des distributions, donc la relation précédente devient :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} \partial_t a_\varepsilon(s,x) \varphi^\delta(s,x) dsdx = \langle a_\varepsilon(T), \varphi(T) \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3),\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} a_\varepsilon(s,x) \partial_t \varphi^\delta(s,x) dsdx. \tag{2.22}$$

Le second membre de la relation (2.20) s'écrit :

$$C_\varepsilon[a,v](s,x) := \nabla \cdot \left(R_\varepsilon(a(s)) v(s)\right)(x) - R_\varepsilon\left(\nabla \cdot (av)(s)\right)(x).$$

En utilisant les résultats de 11 on a :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} C_\varepsilon[a,v](s,x)\varphi^\delta(s,x)dsdx &= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\cdot\left(R_\varepsilon(a(s))v(s)\right)(x)\varphi^\delta(s,x)dsdx \\
&- \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} R_\varepsilon\left(\nabla\cdot(av)(s)\right)(x)\varphi^\delta(s,x)dsdx \\
&= -\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} R_\varepsilon(a(s))(x)v(s,x)\nabla\varphi^\delta(s,x)dsdx \\
&- \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} \nabla\cdot(av)(s,x)R_\varepsilon(\varphi^\delta(s))(x)dsdx \\
&= -\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} a(s,x)R_\varepsilon\left((v\cdot\nabla\varphi^\delta)(s)\right)(x)dtdx \\
&+ \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} (av)(s,x)\cdot\nabla R_\varepsilon(\varphi^\delta(s))(x)dsdx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} a(s,x)\{v(s,x)\cdot\nabla R_\varepsilon(\varphi^\delta(s))(x) - R_\varepsilon\left((v\cdot\nabla\varphi^\delta)(s)\right)(x)\}dsdx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} a(s,x)\{v(s,x)\cdot\left(\nabla\rho_\varepsilon*\varphi^\delta(s)\right)(x) \\
&- \rho_\varepsilon*(\mathrm{div}((v\varphi^\delta)(s)))(x)\}dsdx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} a(s,x)\{v(s,x)\cdot\left(\nabla\rho_\varepsilon*\varphi^\delta(s)\right)(x) - \nabla\rho_\varepsilon*((v\varphi^\delta)(s))(x)\}dsdx \\
&= \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} a(s,x)C^{\varepsilon,\delta}(s,x)dsdx.
\end{aligned}$$

où

$$C^{\varepsilon,\delta}(s,x) := v(s,x)\cdot\left(\nabla\rho_\varepsilon*\varphi^\delta(s)\right)(x) - \nabla\rho_\varepsilon*((v\varphi^\delta)(s))(x).$$

On a donc montré que

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} C_\varepsilon[a,v](s,x)\varphi^\delta(s,x)dsdx = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{R}^3} a(s,x)C^{\varepsilon,\delta}(s,x)dsdx. \tag{2.23}$$

En multipliant (2.20) par φ^δ, en intégrant par rapport sur $[0,T]\times\mathbb{R}^3$ puis en utilisant les relations (2.22) et (2.23), on a :

$$\begin{aligned}
\langle a_\varepsilon(T),\varphi(T)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3),\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3} a(s,x)C^{\varepsilon,\delta}(s,x)dsdx + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^3} a_\varepsilon(s,x)\partial_t\varphi^\delta(s,x)dsdx \\
&\int_0^T\int_{\mathbb{R}^3} -\varphi^\delta(s,x)\nabla\cdot\left(a_\varepsilon(s)v(s)\right)(x) + \varphi^\delta(s,x)\Delta a_\varepsilon(s,x)dsdx
\end{aligned}$$

puisque $a_\varepsilon = \rho_\varepsilon * a$ et $a\in L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)$ donc $\lim\limits_{|x|\to\infty}|a_\varepsilon(s,x)| = 0$, par ailleurs, on sait que $\lim\limits_{|x|\to\infty}|\varphi^\delta(s,x)| = 0$ ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^3}\varphi^\delta(s,x)\nabla\cdot\left(a_\varepsilon(s)v(s)\right)(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^3}(va_\varepsilon)(s,x)\cdot\nabla\varphi^\delta(s,x)dx$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^3}\varphi^\delta(s,x)\Delta a_\varepsilon(s,x)dx = \int_{\mathbb{R}^3}\Delta\varphi^\delta(s,x)a_\varepsilon(s,x)dx.$$

On obtient donc

$$\langle a_\varepsilon(T), \varphi(T)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3),\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} a(s,x) C^{\varepsilon,\delta}(s,x) dsdx - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} a_\varepsilon(s,x) \left(-\partial_t \varphi^\delta(s,x) - v(s,x)\cdot \nabla\varphi^\delta(s,x) - \Delta\varphi^\delta(s,x)\right) dsdx. \tag{2.24}$$

2.3.4 Convergences

Rappelons que la limite faible de $(\varphi^\delta)_\delta$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)\cap L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^2(\mathbb{R}^3)\cap L^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^3))$ est solution au sens des distributions de (2.21). Mais a_ε est régulier alors pour chaque ε on a :

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} a_\varepsilon(s,x) \left(-\partial_t \varphi^\delta(s,x) - v(s,x)\cdot \nabla\varphi^\delta(s,x) - \Delta\varphi^\delta(s,x)\right) dsdx \xrightarrow{\delta\to 0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} a_\varepsilon(s,x) \left(-\partial_t \varphi(s,x) - v^\delta(s,x)\cdot \nabla\varphi(s,x) - \Delta\varphi(s,x)\right) dsdx = 0. \tag{2.25}$$

D'autres part, d'après le lemme 2.3.1 on a :

$$\|C^{\varepsilon,\delta}\|_{L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)} \leqslant \|\nabla\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^3)}\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}_+,\dot{H}^1(\mathbb{R}^3))}\|\varphi^\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)}.$$

La famille $(\varphi^\delta)_\delta$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)$ donc en particulier pour chaque ε, $\left(C^{\varepsilon,\delta}\right)_\delta$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)$ qui est réflexif donc il existe une sous-famille de $\left(C^{\varepsilon,\delta}\right)_\delta$, que nous omettons de noter, qui converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3)$.

Le champ de vecteur v est à divergence nulle, donc on peut écrire

$$C^{\varepsilon,\delta}(s,x) = v(s,x)\cdot\left(\nabla\rho_\varepsilon * \varphi^\delta(s)\right)(x) - \left(\rho_\varepsilon * \left(v(s)\cdot\nabla\varphi^\delta(s)\right)\right)(x).$$

Il faut aussi remarquer que $v\cdot\nabla\varphi^\delta \rightharpoonup v\cdot\nabla\varphi$ dans $L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3))$ et $\varphi^\delta \rightharpoonup \varphi$ dans $L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^2(\mathbb{R}^3))$ donc la seule limite faible de $\left(C^{\varepsilon,\delta}\right)_\delta$ est donc

$$C^{\varepsilon,0}(s,x) := v(s,x)\cdot\left(\rho_\varepsilon * \nabla\varphi(s)\right)(x) - \left(\rho_\varepsilon * \left(v(s)\cdot\nabla\varphi(s)\right)\right)(x).$$

Ainsi pour chaque ε, lorsqu'on tend δ vers 0 dans (2.24) et en utilisant (2.25), on obtient,

$$\langle a_\varepsilon(T), \varphi(T)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3),\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^3} a(s,x) C^{\varepsilon,0}(s,x) dsdx. \tag{2.26}$$

Encore, la famille $\left(C^{\varepsilon,0}\right)_\varepsilon$ est bornée dans $L^2(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3)$, donc admet une sous-famille faiblement convergente dans $L^2(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3)$.

Par ailleurs on sait que $\nabla\varphi\in L^4(\mathbb{R}_+, L^3((\mathbb{R}^3)))$ donc $\rho_\varepsilon * \nabla\varphi \longrightarrow \nabla\varphi$ dans $L^4(\mathbb{R}_+, L^3(\mathbb{R}^3))$. Ainsi par hölder, on a :

$$\|v\cdot\rho_\varepsilon * \nabla\varphi - v\cdot\nabla\varphi\|_{L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}_+,L^2(\mathbb{R}^3))} \leqslant \|v\|_{L^2(\mathbb{R}_+,L^6(\mathbb{R}^3))}\|\rho_\varepsilon * \nabla\varphi - \nabla\varphi\|_{L^4(\mathbb{R}_+,L^3(\mathbb{R}^3))} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

De même $v\cdot\nabla\varphi\in L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3))$ donc $\rho_\varepsilon * v\cdot\nabla\varphi \longrightarrow v\cdot\nabla\varphi$ dans $L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3))$.

On conclut donc que $v\cdot\rho_\varepsilon * \nabla\varphi - \rho_\varepsilon * (v\cdot\nabla\varphi) \longrightarrow 0$ dans $L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^3))$. La limite faible de $\left(C^{\varepsilon,0}\right)_\varepsilon$ dans $L^2(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^3)$ est alors nulle.

Enfin, $a_\varepsilon \longrightarrow a$ dans $L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)$ car par hypothèse $a\in L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^3)$ et par conséquent lorsqu'on tend $\varepsilon\to 0$ dans la relation (2.26) on obtient

$$\langle a(T), \varphi_T\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3),\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} = 0.$$

Cette dernière est vraie pour toute fonction test $\varphi_T\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3)$, ainsi $a(T)$ est nulle au sens des distributions ceci pour tout T.

Par conséquent, a est nulle au sens des distributions.

CHAPITRE 3

UN LEMME D'UNICITÉ AVEC DES APPLICATIONS POUR RÉGULARISATION ET MÉCANIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

Dans [Lév20], l'auteur a étendu le résultat précédent, Il a montré que les équations de transport avec de coefficients peu réguliers ont une propriété d'unicité, même en présence de viscosité.

Ce résultat d'unicité lui permet alors de donner une nouvelle preuve du célèbre théorème de Serrin (1962). Il montre également que la solution nulle est l'unique solution des équations d'Euler sur le tore de dimension 2 sous une hypothèse d'intégrabilité. Dans ce chapitre nous exposons ces travaux.

3.1 Théorème principal

3.1.1 Énoncé

Théorème 3.1.1 (Théorème principal). *Soit $d \geqslant 1$ un entier, $\nu \geqslant 0$ un paramètre réel, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ des nombres réels de conjugués respectifs p' et q'. Soit $v = v(t,x)$ un champ de vecteur de divergence nulle et $v \in L^{p'}(\mathbb{R}_+, \dot{W}^{1,q'}(\mathbb{R}^d))$ et $a \in L^p(\mathbb{R}_+, L^q(\mathbb{R}^d))$. Supposons que a est solution au sens des distributions du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t a + \nabla \cdot (av) - \nu \Delta a = 0, \\ a(0) = 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

où la condition initiale est au sens de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d))$.

Alors a est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$.

Commentons un peu la stratégie que l'auteur a utilisé. Premièrement, parce que a appartient à une classe de faible régularité de distributions, les estimations de type énergie semblent hors de portée. Ainsi, un argument de dualité est beaucoup plus adapté à notre situation. Compte tenu des hypothèses sur a, qui impliquent par exemple que $\Delta a \in L^p(\mathbb{R}_+, \dot{W}^{-2,q}(\mathbb{R}^d))$, nous devons prouver le résultat d'existence suivant.

Théorème 3.1.2 (Théorème d'existence). *Soit $\nu \geqslant 0$ un paramètre réel, $v = v(t,x)$ un champ de vecteur à divergence nulle avec $v \in L^{p'}(\mathbb{R}_+, \dot{W}^{1,q'}(\mathbb{R}^d))$ et $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.*

Alors il existe, au sens des distributions, une solution $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t \varphi - \nabla \cdot (\varphi v) - \nu \Delta \varphi = 0, \\ \varphi(0) = \varphi_0, \end{cases} \tag{3.2}$$

satisfaisant $\|\varphi(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\varphi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}$.

Ce théorème est une légère généralisation du théorème analogique (2.1.2). La preuve que nous fournissons ici suit les mêmes lignes mais ne retient que l'estimation clé, qui est la délimitation de la solution. L'estimations supplémentaires (2.6) est non essentielle et présente l'inconvénient de dégénérer lorsque le coefficient de viscosité est petit. En revanche, la délimitation n'est pas affectée par de tels changements.

On énonce ici un lemme de commutateur, similaire au lemme II.1 de [DL89] que nous utiliserons dans la preuve du théorème 3.1.1.

3.1.2 Lemme de commutateur

Lemme 3.1.1. *Soit $T > 0$, v un champ de vecteur à divergence nulle et $v \in L^{p'}(\mathbb{R}_+, \dot{W}^{1,q'}(\mathbb{R}^d))$. Soit $a \in L^p(\mathbb{R}_+, L^q(\mathbb{R}^d))$, $\rho = \rho(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)dx = 1$, définissons $\forall \varepsilon > 0$*

1. $\rho_\varepsilon := \varepsilon^{-d} \rho(\frac{\cdot}{\varepsilon})$,
2. $C^\varepsilon(t,x) = v(t,x) \cdot (\nabla \rho_\varepsilon * a(t))(x) - (\nabla \rho_\varepsilon * (v(t)a(t)))(x)$,

Alors

$$\|C^\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0.$$

Démonstration. Pour presque tout $(t,x) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$, on a :

$$\begin{aligned} C^\varepsilon(t,x) &= v(t,x) \cdot (\nabla \rho_\varepsilon * a(t))(x) - (\nabla \rho_\varepsilon * (v(t)a(t)))(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(v(t,x) \cdot \nabla \rho_\varepsilon(x-y) a(t,y) - \nabla \rho_\varepsilon(x-y) \cdot v(t,y) a(t,y)\right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} a(t,y) \left(v(t,x) - v(t,y)\right) \cdot \nabla \rho_\varepsilon(x-y) dy. \end{aligned}$$

Par définition de ρ_ε on a $\nabla \rho_\varepsilon = \dfrac{1}{\varepsilon^{d+1}} \nabla \rho(\dfrac{\cdot}{\varepsilon})$, ainsi

$$C^\varepsilon(t,x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d} a(t,y) \frac{v(t,x) - v(t,y)}{\varepsilon} \cdot \nabla \rho(\frac{x-y}{\varepsilon}) dy.$$

En faisant le changement de variable $y = x + \varepsilon z$ on a :

$$C^\varepsilon(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} a(t, x+\varepsilon z) \frac{v(t,x) - v(t,x+\varepsilon z)}{\varepsilon} \cdot \nabla \rho(z) dz.$$

En utilisant la formule de Taylor, on a :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad v(t,x) - v(t,x+\varepsilon z) = -\varepsilon \int_0^1 \nabla v(t, x + r\varepsilon z) \cdot z dr.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}C^\varepsilon(t,x) &= -\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^1 a(t,x+\varepsilon z)\nabla v(t,x+r\varepsilon z) : (\nabla\rho(z)\otimes z)drdz\\ &= -\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d} a(t,x+\varepsilon z)\nabla v(t,x+r\varepsilon z) : (\nabla\rho(z)\otimes z)dzdr,\end{aligned}$$

où : désigne la contraction de deux tenseurs. Puisque $\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q'}=1$ alors q ou q' est fini. Supposons que q est fini et posons

$$\widetilde{C}^\varepsilon(t,x) = -\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d} a(t,x+r\varepsilon z)\nabla v(t,x+r\varepsilon z) : (\nabla\rho(z)\otimes z)dzdr.$$

On a :

$$C^\varepsilon(t,x)-\widetilde{C}^\varepsilon(t,x) = \int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}\left(a(t,x+r\varepsilon z)-a(t,x+\varepsilon z)\right)\nabla v(t,x+r\varepsilon z) : (\nabla\rho(z)\otimes z)dzdr.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\|C^\varepsilon-\widetilde{C}^\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)} &\leqslant \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}|a(t,x+r\varepsilon z)-a(t,x+\varepsilon z)||\nabla v(t,x+r\varepsilon z)||\nabla\rho(z)\otimes z|dzdrdxdt\\ &= \int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^d}|a(t,x+r\varepsilon z)-a(t,x+\varepsilon z)||\nabla v(t,x+r\varepsilon z)|dxdt|\nabla\rho(z)\otimes z|dzdr\\ &\leqslant \int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty\|a(t,.+r\varepsilon z)-a(t,\cdot+\varepsilon z)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\|\nabla v(t,\cdot+r\varepsilon z)\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)}|\nabla\rho(z)\otimes z|\end{aligned}$$

Montrons que $\|a(t,.+r\varepsilon z)-a(t,\cdot+\varepsilon z)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$. Commençons par prendre $f\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$.

$\forall x,\ h\in\mathbb{R}^d$ on a :

$$|f(x+h)-f(x)| = \left|\int_0^1 h\cdot\nabla f(x+th)dt\right| \leqslant |h|\left(\int_0^1|\nabla f(x+th)|^q dt\right)^{\frac{1}{q}},$$

$$|f(x+h)-f(x)|^q \leqslant |h|^q\int_0^1|\nabla f(x+th)|^p dt.$$

Par suite

$$\|f(\cdot+h)-f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant |h|\|\nabla f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

On en déduit donc que

$$\forall f\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)\quad \lim_{r\to 0}\sup_{h,|h|\leqslant r}\|f(\cdot+h)-f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Par hypothèse $q<\infty$, alors pour tout $\eta>0$ il existe une fonction $f\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$\|f-a(t,\cdot\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}<\eta.$$

Remarquons que

$$\|a(t,\cdot+h)-a(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|a(t,\cdot+h)-f(\cdot+h)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}+\|f(\cdot+h)-f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}+\|f-a(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

Donc d'après ce qui précède

$$\lim_{r\to 0}\sup_{h,|h|\leqslant r}\|f(\cdot+h)-f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

il existe donc $r_0 > 0$ tel que $\forall\, 0 \leqslant r \leqslant r_0$

$$\sup_{h,|h|\leqslant r} \|f(\cdot + h) - f\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} < \eta.$$

Ainsi,

$$\forall\, 0 \leqslant r \leqslant r_0 \qquad \sup_{h,|h|\leqslant r} \|a(t,\cdot + h) - a(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant 3\eta,$$

et par suite

$$\lim_{r\to 0} \sup_{h,|h|\leqslant r} \|a(t,\cdot + h) - a(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

En particulier,

$$\forall\, z \in \mathbb{R}^d, r \in [0,1] \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \|a(t,\cdot + \varepsilon z) - a(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \|a(t,\cdot + r\varepsilon z) - a(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 0,$$

or

$$\|a(t,\cdot + r\varepsilon z) - a(t,\cdot + \varepsilon z)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|a(t,\cdot + \varepsilon z) - a(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} + \|a(t,\cdot + \varepsilon z) - a(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$$

donc

$$\forall\, z \in \mathbb{R}^d, r \in [0,1] \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \|a(t,\cdot + r\varepsilon z) - a(t,\cdot + \varepsilon z)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Par ailleurs,

$$\|a(t,\cdot + r\varepsilon z) - a(t,\cdot + \varepsilon z)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|a(t,\cdot + \varepsilon z)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} + \|a(t,\cdot + r\varepsilon z)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} = 2\|a(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

En résumé, on a :

1. $\forall \varepsilon > 0 \quad (r,t,z) \to \|a(t,\cdot + r\varepsilon z) - a(t,\cdot + \varepsilon z)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \|\nabla v(t,\cdot + r\varepsilon z)\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)} |\nabla\rho(z) \otimes z| \in L^1([0,1] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$;
2. $$\begin{aligned} &\|a(t,\cdot + r\varepsilon z) - a(t,\cdot + \varepsilon z)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \|\nabla v(t,\cdot + r\varepsilon z)\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)} |\nabla\rho(z) \otimes z| \\ &\qquad\qquad \leqslant 2\|a(t)\|_{L^q} \|\nabla v(t)\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)} |\nabla\rho(z) \otimes z| \end{aligned}$$

   et

   $$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \|a(t)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \|\nabla v(t)\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)} |\nabla\rho(z) \otimes z| &\leqslant \|a\|_{L^p(\mathbb{R}_+, L^q(\mathbb{R}^d))} \|\nabla v\|_{L^{p'}(\mathbb{R}_+, L^{q'})} \\ &\qquad \|\nabla\rho(z) \otimes z\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} < \infty. \end{aligned}$$

3. Puisque

   $$\|\nabla v(t,\cdot + r\varepsilon z)\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\nabla v(t)\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)} \quad \forall\, (r,z) \in [0,1] \times \mathbb{R}^d$$

   et pour presque tout $t \in \mathbb{R}_+$,

   $$\lim_{\varepsilon\to 0} \|a(t,\cdot + r\varepsilon z) - a(t,\cdot + \varepsilon z)\|_{L^q(\mathbb{R}^d)} \|\nabla v(t,\cdot + r\varepsilon z)\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)} |\nabla\rho(z) \otimes z| = 0.$$

Le théorème de convergence dominée nous permet de conclure que

$$\|C^\varepsilon - \widetilde{C}^\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0. \tag{3.3}$$

Pour finir la preuve du lemme il suffit de montrer que $\|\widetilde{C}^\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$. Posons $U(t,x) = a(t,x)\nabla v(t,x)$, puisque $\nabla v \in L^{p'}(\mathbb{R}_+, L^{q'}(\mathbb{R}^d))$ et $a \in L^p(\mathbb{R}_+, L^q(\mathbb{R}^d))$ alors $U \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ et on peut écrire $\widetilde{C}^\varepsilon$ sous la forme

$$\widetilde{C}^\varepsilon(t,x) = -\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} U(t, x + r\varepsilon z) : (\nabla\rho(z) \otimes z) dz dr.$$

En faisant une intégration par parties on a : pour tout

$$1 \leqslant i \leqslant d \quad \int_{\mathbb{R}^d} z_i \partial_i \rho(z) \overset{\rho\in\mathcal{C}_c}{=} -\int_{\mathbb{R}^d} \rho(z) dz = -1.$$

On conclut donc que

$$-\int_{\mathbb{R}^d} (\nabla\rho(z) \otimes z) dz = I_d,$$

où I_d est la matrice identité. En conséquence

$$\widetilde{C}^0(t,x) = -\int_0^1 a(t,x)\nabla v(t,x) : \int_{\mathbb{R}^d} (\nabla\rho(z)\otimes z) dz dr = a(t,x)\nabla v(t,x) : I_d = a(t,x) \operatorname{div} v(t,x) = 0.$$

En appliquant encore une fois le théorème de convergence dominée à

$$\widetilde{C}^\varepsilon(t,x) = -\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} U(t, x + r\varepsilon z) : (\nabla\rho(z) \otimes z) dz dr.$$

on obtient $\|\widetilde{C}^\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$.

En utilisant (3.3) on a :

$$\|C^\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)} \leqslant \|C^\varepsilon - \widetilde{C}^\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)} + \|\widetilde{C}^\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

Ce qui achève la preuve du lemme. □

3.1.3 Preuve du théorème d'existence

Démonstration. 3.1.2

Régularisation et estimation

Soit $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} \rho(z) dz = 1$. Pour tout $\delta > 0$, on pose $\rho_\delta = \delta^{-d}\rho(\frac{\cdot}{\delta})$ et $v_\delta = \rho_\delta * v$. Avec la méthode de Friedrichs combinée avec les estimations du noyau de la chaleur, illustrée dans annexe 1 p. 44, on montre que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t\varphi - \nabla\cdot(\varphi v_\delta) - \nu\Delta\varphi = 0, \\ \varphi(0) = \varphi_0, \end{cases} \tag{3.4}$$

admet une unique solution $\varphi^\delta \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, W^{m,p}(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, W^{m-2,p})$, pour tous $m, p \geqslant 1$.

Soit $r \geqslant 2$ un nombre réel.

En multipliant par $\varphi^\delta|\varphi^\delta|^{r-2}$ l'équation (3.4) satisfaite par φ^δ on a :

$$\varphi^\delta|\varphi^\delta|^{r-2}\partial_t\varphi^\delta - \varphi^\delta|\varphi^\delta|^{r-2}\nabla\cdot(\varphi^\delta v_\delta) - \nu\varphi^\delta|\varphi^\delta|^{r-2}\Delta\varphi^\delta = 0$$

qu'on réécrit, à cause de la régularité de φ^δ sous la forme

$$\frac{1}{r}\partial_t\left(|\varphi^\delta|^r\right) - v_\delta\cdot\left(\varphi^\delta|\varphi^\delta|^{r-2}\nabla\varphi^\delta\right) - \nu\varphi^\delta|\varphi^\delta|^{r-2}\Delta\varphi^\delta = 0. \tag{3.5}$$

D'une part, pour tout $t > 0$ on a :

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{r} \partial_t \left(|\varphi^\delta|^r \right) = \frac{1}{r} \|\varphi^\delta(t)\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} - \frac{1}{r} \|\varphi_0\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \tag{3.6}$$

Pour tout $s \geqslant 0$ les fonctions $\varphi^\delta(s)$, $\nabla\varphi^\delta(s)$ et $v_\delta(s)$ tendent vers 0 en l'infini, ce qui justifie les lignes suivantes.

$$\int_{\mathbb{R}^d} v_\delta \cdot \left(\varphi^\delta |\varphi^\delta|^{r-2} \nabla \varphi^\delta \right) = \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^d} v_\delta \cdot \nabla \left(|\varphi^\delta|^r \right) \overset{IPP}{=} - \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi^\delta|^r \operatorname{div} v_\delta \overset{\operatorname{div} v_\delta = 0}{=} 0; \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^\delta |\varphi^\delta|^{r-2} \Delta \varphi^\delta \overset{IPP}{=} - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \left(\varphi^\delta |\varphi^\delta|^{r-2} \right) \cdot \nabla \varphi^\delta = (1-r) \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla \varphi^\delta|^2 |\varphi^\delta|^{r-2} \\ = (1-r) \|\nabla \varphi^\delta |\varphi^\delta|^{\frac{r-2}{2}} \|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

En intégrant (3.5) sur $[0, t] \times \mathbb{R}^d$, et en utilisant les relations (3.6), (3.7) et (3.8) on obtient :

$$\frac{1}{r} \|\varphi^\delta(t)\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} + \int_0^t (r-1) \|\nabla \varphi^\delta |\varphi^\delta|^{\frac{r-2}{2}} \|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \frac{1}{r} \|\varphi_0\|_{L^r(\mathbb{R}^d)}.$$

Ce qui conduit à :

$$\|\varphi^\delta(t)\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\varphi_0\|_{L^r(\mathbb{R}^d)} \quad \forall r \geqslant 2.$$

En faisant tendre r vers l'infini, on a :

$$\|\varphi^\delta(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\varphi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Autrement

$$\sup_\delta \|\varphi^\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)} \leqslant \|\varphi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}. \tag{3.9}$$

Convergences

La famille $\left(\varphi^\delta\right)_\delta$ est donc bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$. Il possède donc une sous famille qui converge faiblement $\star$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ vers une fonction $\varphi \in L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ et on a :

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)} \leqslant \liminf_\delta \|\varphi^\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)}.$$

Donc d'après (3.9) on a :

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)} \leqslant \|\varphi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Il reste donc à montrer que φ est solution faible de (3.2)

Montrons que $\Delta\varphi^\delta \rightharpoonup^\star \Delta\varphi$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{W}^{-2,\infty}(\mathbb{R}^d))$ et $\varphi^\delta v_\delta \rightharpoonup \varphi v$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$.
$\left(\varphi^\delta\right)_\delta \subset L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ donc $\Delta\varphi^\delta \subset L^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{W}^{-2,\infty}(\mathbb{R}^d))$.
$\forall u \in L^1(\mathbb{R}_+, \dot{W}^{2,1}(\mathbb{R}^d))$,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \Delta\varphi^\delta u = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^\delta \Delta u \xrightarrow{\delta \to 0}= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \Delta u = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \Delta u.$$

Ainsi $\Delta\varphi^\delta \rightharpoonup^\star \Delta\varphi$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, \dot{W}^{-2,\infty}(\mathbb{R}^d))$.

D'autres part soit K un compact contenu dans $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ et $u \in L^\infty(K)$, On a :

$$\Big|\int_K (\varphi^\delta v_\delta - \varphi v)u\Big| \leqslant \Big|\int_K \varphi^\delta (v_\delta - v)u\Big| + \Big|\int_K v(\varphi^\delta - \varphi)u\Big| \leqslant \|\varphi^\delta\|_{L^\infty(K)} \|(v_\delta - v)u\|_{L^1(K)}$$
$$+ \Big|\int_K uv(\varphi^\delta - \varphi)\Big| \leqslant \|\varphi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \|u\|_{L^\infty(K)} \|(v_\delta - v)\|_{L^1(K)} + \Big|\int_K uv(\varphi^\delta - \varphi)\Big|$$

Rappelons que $u \in L^\infty(K)$ et $v \in L^1(K)$ donc $uv \in L^1(K)$ puis $\Big|\int_K uv(\varphi^\delta - \varphi)\Big| \xrightarrow{\delta \to 0} 0.$

$v \in L^{p'}(\mathbb{R}_+, \dot{W}^{1,q'}(\mathbb{R}^d))$ donc au moins $v \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ [Dro01, Proposition 1.8.2]
Montrons que $v_\delta \xrightarrow{\delta \to 0} v$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$
Soit $\psi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$, on a, grâce à (3.18)

$$\|(v_\delta - v)\psi\|_{L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)} \leqslant \|(v_\delta - v)\|_{L^{p'}(\mathbb{R}_+, L^{q'}(\mathbb{R}^d))} \|\psi\|_{L^p(\mathbb{R}_+, L^q(\mathbb{R}^d))} \xrightarrow{\delta \to 0} 0,$$

et par suite

$$\|(v_\delta - v)u\|_{L^1(K)} \leqslant \|u\|_{L^\infty(K)} \|v_\delta - v\|_{L^1(K)} \xrightarrow{\delta \to 0} 0.$$

On en déduit donc que

$$\Big|\int_K (\varphi^\delta v_\delta - \varphi v)u\Big| \xrightarrow{\delta \to 0} 0.$$

Par conséquent $\varphi^\delta v_\delta \rightharpoonup \varphi v$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$.

$$0 = \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \varphi^\delta u - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \cdot (\varphi^\delta v_\delta) u - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} \nu \nabla \varphi^\delta u \xrightarrow{\delta \to 0}$$
$$\int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} \partial_t \varphi u - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \cdot (\varphi v) u - \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}^d} \nu \nabla \varphi u.$$

Par conséquent φ est solution faible de (3.2) et vérifie

$$\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)} \leqslant \|\varphi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}. \qquad \square$$

Le corollaire suivant est une conséquence directe du théorème 3.1.2

Corollaire 3.1.1. *Soit $T > 0$, ν un paramètre réel positif. Soit $v = v(t,x)$ un champ de vecteur de divergence nulle appartenant à $L^{p'}(\mathbb{R}_+, \dot{W}^{1,q'}(\mathbb{R}^d))$. Soit $\varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.*

Alors il existe sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ une solution au sens des distributions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \nabla \cdot (\varphi v) - \Delta \varphi = 0, \\ \varphi(T) = \varphi_0. \end{cases} \tag{3.10}$$

3.1.4 Preuve du théorème principal

Démonstration. 3.1.1

Préliminaires

Commençons par prendre ρ une fonction régularisante radiale et définissons $\rho_\varepsilon := \varepsilon^{-d} \rho(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ et $a_\varepsilon = \rho_\varepsilon * a$ la convolution de a et ρ_ε en espace.

Par hypothèse $a \in L^p(\mathbb{R}_+, L^q(\mathbb{R}^d))$, la convolution étant en espace, a_ε n'est pas assez régulier en temps, néanmoins, $a_\varepsilon \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d))$ et $\partial_t a_\varepsilon \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d))$.

Ainsi

$$\partial_t a_\varepsilon - \nabla \cdot (a_\varepsilon v) - \nu \Delta a_\varepsilon = \rho_\varepsilon * (\partial_t a - \nu \Delta a) - v \cdot \nabla(\rho_\varepsilon * a) = v \cdot \nabla(\rho_\varepsilon * a) - \rho_\varepsilon * (\nabla a \cdot v) = C^\varepsilon \tag{3.11}$$

où C^ε est défini dans le lemme 3.1.1.

Soit $T > 0$, considérons le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - v^\delta \cdot \nabla \varphi - \Delta \varphi = 0, \\ \varphi(T) = \varphi_T, \end{cases} \tag{3.12}$$

où v^δ est la convolé en espace du champ de vecteur de divergence nulle v par ρ_δ et $\varphi_T \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$.

Il existe une solution φ^δ de (3.12) dans $\mathcal{C}([0,T], W^{m,p}(\mathbb{R}^d)) \cap \mathcal{C}^1((0,T), W^{m-2,p}(\mathbb{R}^d))$ pour tous $m, p \geq 1$. De plus la famille $(\varphi^\delta)_\delta$ est bornée dans $\left(\varphi^\delta\right)_\delta$ est bornée dans $L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^3)$ et sa limite faible est solution au sens des distributions du problème de Cauchy

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - v \cdot \nabla \varphi - \Delta \varphi = 0, \\ \varphi(T) = \varphi_T, \end{cases}$$

Multiplions (3.11) par φ^δ on a,

$$\varphi^\delta \partial_t a_\varepsilon + \varphi^\delta \nabla \cdot (a_\varepsilon v) - \nu \varphi^\delta \Delta a_\varepsilon = \varphi^\delta C^\varepsilon. \tag{3.13}$$

On sait que $\partial_t a_\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d))$ et $\varphi^\delta \in L^\infty([0,T], W^{m,p}(\mathbb{R}^d))$ (pour tout $p, m \geq 1$) ainsi

$$\begin{aligned} \int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \varphi^\delta \partial_t a_\varepsilon &= \langle a_\varepsilon(T), \varphi^\delta(T) \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} - \langle a_\varepsilon(0), \varphi^\delta(0) \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} - \int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} a_\varepsilon \partial_t \varphi^\delta \\ &\overset{a(0)=0}{=} \langle a_\varepsilon(T), \varphi^\delta(T) \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} - \int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} a_\varepsilon \partial_t \varphi^\delta. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Pour tout $s \in [0,T]$, $\varphi^\delta(s)$, $a_\varepsilon(s)$, $\nabla \varphi^\delta(s)$ et $\nabla a_\varepsilon(s)$ tendent vers 0 à l'infini, ce qui justifie les lignes suivantes

$$\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \varphi^\delta \nabla \cdot (a_\varepsilon v) = - \int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \nabla \varphi^\delta \cdot (a_\varepsilon v), \tag{3.15}$$

$$\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \varphi^\delta \Delta a_\varepsilon = \int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \Delta \varphi^\delta a_\varepsilon. \tag{3.16}$$

Ainsi en intégrant (3.13) sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ et en utilisant les relations (3.14), (3.15) et (3.16) on obtient :

$$\langle a_\varepsilon(T), \varphi_T \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} = \int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \varphi^\delta C^\varepsilon - \int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} a_\varepsilon \left[-\partial_t \varphi^\delta - \nabla \cdot (v \varphi^\delta) - \nu \Delta \varphi^\delta \right]. \tag{3.17}$$

Convergences

Du lemme 3.1.1, $C^\varepsilon \in L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ et comme φ^δ converge faiblement $\star$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$ vers une fonction φ solution faible sur $[0,T] \times \mathbb{R}^d$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi - \nabla \cdot (v \varphi) - \nu \Delta = 0, \\ \varphi(0) = \varphi_T. \end{cases}$$

Alors pour chaque ε

$$\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \varphi^\delta(s,x) C^\varepsilon(s,x) ds dx \xrightarrow{\delta\to 0} \int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \varphi(s,x) C^\varepsilon(s,x) ds dx.$$

Rappelons que φ^δ est solution de (3.12) donc

$$-\partial_t\varphi^\delta - \nabla\cdot(\varphi^\delta v) - \nu\Delta\varphi^\delta = \nabla\cdot(\varphi^\delta v^\delta) - \nabla\cdot(\varphi^\delta v) = \nabla\cdot(\varphi^\delta(v^\delta - v)).$$

Ainsi

$$\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} a_\varepsilon[-\partial_t\varphi^\delta - \nabla\cdot(v\varphi^\delta) - \nu\Delta\varphi^\delta] = \int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} a_\varepsilon \nabla\cdot(\varphi^\delta(v^\delta - v)) = \int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \varphi^\delta(v^\delta - v)\cdot\nabla a_\varepsilon.$$

On a successivement

$$\begin{aligned}
v_\delta(t,x) - v(t,x) &= \int_{\mathbb{R}^d} [v(t,x-y) - v(t,x)]\rho_\delta(y) dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^1 \nabla v(t,x-ry) : (\rho_\delta(y)\otimes y) dr dy \\
|v_\delta(t,x) - v(t,x)| &\leqslant \int_0^1\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v(t,x-ry)||\rho_\delta(y)||y|^{\frac{1}{q}+\frac{1}{q'}} dy dr \\
&\leqslant \left[\int_{\mathbb{R}^d} |\rho_\delta(y)||y|\right]^{\frac{1}{q}} \int_0^1 \left[\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v(t,x-ry)|^{q'}|\rho_\delta(y)||y| dy\right]^{\frac{1}{q'}} dr \\
&\leqslant \left[\int_{\mathbb{R}^d} |\rho_\delta(y)||y|\right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v(t,x-ry)|^{q'}|\rho_\delta(y)||y| dy dr\right]^{\frac{1}{q'}} \\
|v_\delta(t,x) - v(t,x)|^{q'} &\leqslant \||.|\rho_\delta\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{q'}{q}} \int_0^1\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v(t,x-ry)|^{q'}|\rho_\delta(y)||y| dy dr \\
\|v_\delta(t) - v(t)\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)}^{q'} &\leqslant \||.|\rho_\delta\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{\frac{q'}{q}} \int_0^1\int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v(t,x-ry)|^{q'} dx\right] |\rho_\delta(y)||y| dy dr \\
&\leqslant \||.|\rho_\delta\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{1+\frac{q'}{q}} \|\nabla v(t)\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)}^{q'} \\
\|v_\delta - v\|_{L^{p'}(\mathbb{R}_+,L^{q'}(\mathbb{R}^d))}^{p'} &\leqslant \||.|\rho_\delta\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}^{p'} \int_{\mathbb{R}_+} \|\nabla v(t)\|_{L^{q'}(\mathbb{R}^d)}^{p'} dt \\
\|v_\delta - v\|_{L^{p'}(\mathbb{R}_+,L^{q'}(\mathbb{R}^d))} &\leqslant \||.|\rho_\delta\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|\nabla v\|_{L^{p'}(\mathbb{R}_+,L^{q'}(\mathbb{R}^d))}.
\end{aligned}$$

Mais

$$\||.|\rho_\delta\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \delta^{-d}\int_{\mathbb{R}^d} |y||\rho(\tfrac{y}{\delta})| dy = \delta\int_{\mathbb{R}^d} |z||\rho(z)| dz = \delta\||.|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

donc

$$\|v_\delta - v\|_{L^{p'}(\mathbb{R}_+,L^{q'}(\mathbb{R}^d))} \leqslant \delta\||.|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|\nabla v\|_{L^{p'}(\mathbb{R}_+,L^{q'}(\mathbb{R}^d))}. \tag{3.18}$$

On en déduit que $v_\delta \xrightarrow{\delta\to 0} v$ dans $L^{p'}(\mathbb{R}_+, L^{q'}(\mathbb{R}^d))$ et par suite, pour chaque ε

$$\left|\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \varphi^\delta(v^\delta - v)\cdot\nabla a_\varepsilon\right| \leqslant \|\varphi^\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)} \|v_\delta - v\|_{L^{p'}(\mathbb{R}_+,L^{q'}(\mathbb{R}^d))} \|\nabla a_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}_+,L^q(\mathbb{R}^d))} \xrightarrow{\delta\to 0} 0$$

car la famille $(\varphi^\delta)_\delta$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)$.

Lorsqu'on tend δ vers 0 dans (3.17), pour chaque ε on a :

$$\langle a_\varepsilon(T), \varphi_T\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} = \int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \varphi(s,x)C^\varepsilon(s,x)dsdx. \tag{3.19}$$

D'après le lemme 3.1.1, C^ε converge fortement dans $L^1(\mathbb{R}_+\times)$ vers 0 donc

$$\left|\int_{[0,T]\times\mathbb{R}^d} \varphi(s,x)C^\varepsilon(s,x)dsdx\right| \leqslant \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)}\|C^\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0.$$

Ainsi lorsqu'on tend à nouveau ε vers 0 dans (3.19) et sachant que $a_\varepsilon(T)$ converges fortement vers $a(T)$ dans $L^q(\mathbb{R}^d)$ donc au sens des distributions, on obtient

$$\langle a(T), \varphi_T\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Comme on a cette égalité pour toute fonction test φ_T on a que $a(T)$ est une distribution nulle ceci pour tout T donc $a = 0$. □

3.2 Théorème de Serrin

3.2.1 Énoncé

Théorème 3.2.1 (Serrin). *Soit $u = u(t,x)$ une solution de Laray des équations de Navier Stokes*

$$\begin{cases} \partial_t u + \nabla\cdot(u\otimes u) - \Delta u = -\nabla p, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ u(0) = u_0 \in L^2(\mathbb{T}^3) \end{cases} \tag{3.20}$$

sur $]0,T[\times\mathbb{R}^d$. Supposons qu'ils existent $T_2 > T_1 > 0$ et $2 \leqslant p < \infty$, $3 < q \leqslant \infty$ tels que $\dfrac{2}{p} + \dfrac{d}{q} = 1$ et $u \in L^p(]T_1,T_2[, L^q(\mathbb{T}^3))$.

Alors $u \in \mathcal{C}^\infty(]T_1,T_2[\times\mathbb{T}^3)$.

Dans le but de donner une nouvelle preuve du théorème de Serrin, nous énonçons un théorème analogue à celui 3.1.2.

Théorème 3.2.2 (Théorème d'existence). *Soit $d \geqslant 3$ un entier. Soit $\nu > 0$ un paramètre réel. Soit $2 \leqslant p < \infty$ et $d < q \leqslant \infty$ des réels satisfaisant $\dfrac{2}{p} + \dfrac{d}{q} = 1$. Soit v un champ de vecteur de divergence nulle dans $L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^d))$. Soit w un champ de vecteur dans $L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)) \cap L^p(\mathbb{R}_+, L^q(\mathbb{R}^d))$.*

Alors il existe une solution φ du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_t \varphi - \nabla\cdot(\varphi v) - \nu\Delta\varphi = -{}^t\nabla\varphi\cdot w, \\ \varphi(0) = \varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \end{cases} \tag{3.21}$$

satisfaisant, pour presque tout $t > 0$

$$\|\varphi(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\varphi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \exp\Big[\frac{C^p}{p\nu^{p-1}}\int_0^t \|w(s)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^d)}ds\Big], \tag{3.22}$$

où C est une constante qui dépend uniquement de d.

Ce dernier théorème nous conduit à un résultat d'unicité formulé dans le théorème suivant.

Théorème 3.2.3 (Théorème d'unicité). *Soit $d \geqslant 3$ un entier naturel. Soit $\nu > 0$ un paramètre réel. Soit $2 \leqslant p < \infty$ et $d < q \leqslant \infty$ des entiers satisfaisant $\frac{2}{p} + \frac{d}{q} = 1$. Soit v un champ de vecteur de divergence nulle appartenant à $L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^d))$. Soit w un champ de vecteur dans $L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{R}^d)) \cap L^p(\mathbb{R}_+, L^q(\mathbb{R}^d))$. Soit $a \in L^2(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$. Supposons que a est solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} \partial_t a + \nabla \cdot (av) - \nu \Delta a = \nabla \cdot (wa), \\ a(0) = 0, \end{cases}$$

où la condition initiale est au sens de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d))$.

Alors a est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$.

3.2.2 Preuve du théorème d'existence

Démonstration. 3.2.2

Régularisation et estimations

Soit $\rho = \rho(x)$ un noyau régularisant et posons $\rho_\delta(x) = \delta^{-d}\rho(\frac{x}{\delta})$. Soit $w_\delta = w * \rho_\delta$ et $v_\delta = v * \rho_\delta$. Considérons le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} \partial_t \varphi - \nabla \cdot (\varphi v_\delta) - \nu \Delta \varphi = -{}^t\nabla \varphi \cdot w_\delta, \\ \varphi(0) = \varphi_0 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d). \end{cases} \tag{3.23}$$

On montre, grâce aux méthodes de Friedrichs combinées avec les estimations du noyau de la chaleur, que (3.23) admet une unique solution φ^δ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R}^d))$ pour tout $p \geqslant 2$. De plus φ^δ est lisse en espace et toutes ses dérivées spatiales sont dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{R}^d))$. Nous passons à l'estimations uniformes par rapport au paramètre de régularisation.

En multipliant par φ^δ l'équation (3.23) satisfaite par φ^δ, on a :

$$\varphi^\delta \partial_t \varphi^\delta - \varphi^\delta \nabla \cdot (\varphi^\delta v_\delta) - \varphi^\delta \nu \Delta \varphi^\delta = -\varphi^\delta ({}^t\nabla \varphi^\delta \cdot w_\delta). \tag{3.24}$$

Puisque $\nabla \cdot v = 0$ alors $\nabla \cdot (v_\delta) = \nabla \cdot (v * \rho_\delta) = (\nabla \cdot v) * \rho_\delta = 0$. Ainsi $\nabla \cdot (\varphi^\delta v_\delta) = v_\delta \cdot \nabla \varphi^\delta$ et par suite

$$\varphi^\delta \nabla \cdot (\varphi^\delta v_\delta) = v_\delta \cdot (\varphi^\delta \nabla \varphi^\delta) = \frac{1}{2} v_\delta \cdot \nabla |\varphi^\delta|^2.$$

Par ailleurs $\Delta|\varphi^\delta|^2 = 2|\nabla\varphi^\delta|^2 + 2\varphi^\delta\Delta\varphi^\delta$ donc $\varphi^\delta\Delta\varphi^\delta = \frac{1}{2}\Delta|\varphi^\delta|^2 - |\nabla\varphi^\delta|^2$ et l'égalité (3.24) devient

$$\partial_t|\varphi^\delta|^2 - \frac{1}{2} v_\delta \cdot \nabla|\varphi^\delta|^2 - \frac{\nu}{2}\Delta|\varphi^\delta|^2 + \nu|\nabla\varphi^\delta|^2 = -\varphi^\delta({}^t\nabla\varphi^\delta \cdot w_\delta). \tag{3.25}$$

Notons $\psi^{(\delta)} = |\varphi^\delta|^2$. Soit $r \geqslant 2$ et $t > 0$, on a :

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi^\delta|^{r-2} \partial_t |\varphi^\delta|^2 = \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^d} \int_0^t \partial_t |\varphi^\delta|^r = \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^d} \left[|\varphi^\delta(t)|^r - |\varphi_0|\right] = \frac{1}{r} \left(\|\varphi^\delta\|^r_{L^r(\mathbb{R}^d)} - \|\varphi_0\|^r_{L^r(\mathbb{R}^d)} \right).$$

Rappelons que $v_\delta(s)$, $\varphi^\delta(s)$ tendent vers zéro à l'infini ainsi que $\nabla\varphi^\delta(s)$, ceci justifie les deux lignes suivantes

$$\int_{\mathbb{R}^d} v^\delta\cdot(|\varphi^\delta|^{r-2}\nabla|\varphi^\delta|^2)=\frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}^d} v^\delta\cdot\nabla(|\varphi^\delta|^p)=-\frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi^\delta|^r\operatorname{div}v^\delta\overset{\operatorname{div}v^\delta=0}{=}0 \tag{3.26}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d}\psi^{(\delta)\frac{r-2}{2}}\Delta\psi^{(\delta)}=-\int_{\mathbb{R}^d}\nabla(\psi^{(\delta)\frac{r-2}{2}})\cdot\nabla\psi^{(\delta)}=-\tfrac{r-2}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\psi^{(\delta)\frac{r-4}{2}}|\nabla\psi^{(\delta)}|^2=-\tfrac{r-2}{2}\|\psi^{(\delta)\frac{r-4}{4}}\nabla\psi^{(\delta)}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \tag{3.27}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi^\delta|^{r-2}|\nabla\varphi^\delta|^2=\|\nabla\varphi^\delta|\varphi^\delta|^{\frac{r-2}{2}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{3.28}$$

En multipliant (3.24) par $|\varphi^\delta|^{r-2}$ et en utilisant les relations (3.26),(3.27) et (3.28) on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\|\varphi^\delta\|^r_{L^r(\mathbb{R}^d)}+\nu\tfrac{r-2}{4}\int_0^t\|\psi^{(\delta)\frac{r-4}{4}}\nabla\psi^{(\delta)}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}+\int_0^t\nu\|\nabla\varphi^\delta|\varphi^\delta|^{\frac{r-2}{2}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}&\\ =\frac{1}{r}\|\varphi_0\|^r_{L^r(\mathbb{R}^d)}-\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi^\delta|^{r-2}\varphi^\delta({}^t\nabla\varphi^\delta\cdot w_\delta).&\end{aligned} \tag{3.29}$$

Soit

$$\begin{aligned}I(t)&=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}|\varphi^\delta|^{r-2}\varphi^\delta({}^t\nabla\varphi^\delta\cdot w_\delta)\\ &=\int_0^t\int_{\mathbb{R}^d}(\psi^{(\delta)})^{\frac{r}{4}}|\varphi^\delta|^{\frac{r-4}{2}}\varphi^\delta\left({}^t\nabla\varphi^\delta\cdot w_\delta\right)\\ |I(t)|&\leqslant\int_0^t\|\nabla\varphi^\delta|\varphi^\delta|^{\frac{r-2}{2}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|(\psi^{(\delta)})^{\frac{r}{4}}\|_{L^{\widetilde{q}}(\mathbb{R}^d)}\|w_\delta\|_{L^q(\mathbb{R}^d)},\end{aligned}$$

où $\widetilde{q}$ est défini par $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{\widetilde{q}}=1$, il est lié à p par :

$$1-\frac{2}{p}=\frac{d}{q}=d(\frac{1}{2}-\frac{1}{\widetilde{q}}).$$

Ainsi l'espace de Sobolev $\dot{H}^{1-\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continument dans $L^{\widetilde{q}}(\mathbb{R}^d)$. Il existe donc une constante C dépendant uniquement de p et d telle que $\|(\psi^{(\delta)})^{\frac{r}{4}}\|_{L^{\widetilde{q}}(\mathbb{R}^d)}\leqslant C\|(\psi^{(\delta)})^{\frac{r}{4}}\|_{\dot{H}^{1-\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^d)}$.

Puisque que $d\geqslant 3$ et $p\geqslant 2$, alors $0\leqslant 1-\dfrac{2}{p}<1$, l'exposant de Sobolev $1-\frac{2}{p}$ est dans un intervalle $[0,1]$ auquel n'appartient pas la valeur $\frac{3}{2}$ autour de laquelle la constante C s'explose. Pour une dimension d fixée, C ne dépend uniquement que de p.

Par ailleurs

$$\dot{H}^{1-\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^d)=\left[L^2(\mathbb{R}^d),\dot{H}^1(\mathbb{R}^d)\right]_{[1-\frac{2}{p}]}$$

donc

$$\|(\psi^{(\delta)})^{\frac{r}{4}}\|_{\dot{H}^{1-\frac{2}{p}}(\mathbb{R}^d)}\leqslant\|(\psi^{(\delta)})^{\frac{r}{4}}\|^{\frac{2}{p}}_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|\nabla(\psi^{(\delta)})^{\frac{r}{4}}\|^{1-\frac{2}{p}}_{L^2(\mathbb{R}^d)}=\|\varphi^\delta\|^{\frac{r}{p}}_{L^r(\mathbb{R}^d)}\|\nabla(\psi^{(\delta)})^{\frac{r}{4}}\|^{1-\frac{2}{p}}_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Mais $\nabla(\psi^{(\delta)})^{\frac{r}{4}}=\dfrac{r}{4}(\psi^{(\delta)})^{\frac{r-4}{4}}\nabla\psi^{(\delta)}$ donc

$$\|\nabla(\psi^{(\delta)})^{\frac{r}{4}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}=\frac{r}{4}\|(\psi^{(\delta)})^{\frac{r-4}{4}}\nabla\psi^{(\delta)}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

et

$$\|(\psi^{(\delta)})^{\frac{r}{4}}\|_{L^{\widetilde{q}}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\|\varphi^\delta\|^{\frac{r}{p}}_{L^r(\mathbb{R}^d)}\left(\frac{r}{4}\|(\psi^{(\delta)})^{\frac{r-4}{4}}\nabla\psi^{(\delta)}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right)^{1-\frac{2}{p}}.$$

On a ensuite

$$|I(t)| \leqslant C\int_0^t \|\nabla\varphi^\delta|\varphi^\delta|^{\frac{r-2}{2}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|\varphi^\delta\|^{\frac{r}{p}}_{L^r(\mathbb{R}^d)}\left(\frac{r}{4}\|(\psi^{(\delta)})^{\frac{r-4}{4}}\nabla\psi^{(\delta)}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right)^{1-\frac{2}{p}}\|w_\delta\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

Soit $\widetilde{p}$ tel que $\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{\widetilde{p}}=1$, d'après l'inégalité des Young, pour tous réels a, b et c

$$|abc| \leqslant \frac{|a|^2}{2}+\frac{|b|^{\widetilde{p}}}{\widetilde{p}}+\frac{|c|^p}{p}.$$

En particulier, pour

$$a=\sqrt{\nu}\|\nabla\varphi^\delta|\varphi^\delta|^{\frac{r-2}{2}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)};$$

$$b=\nu^{\frac{1}{\widetilde{p}}}\left(\frac{r}{4}\|(\psi^{(\delta)})^{\frac{r-4}{4}}\nabla\psi^{(\delta)}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right)^{1-\frac{2}{p}};$$

$$c=C\nu^{\frac{1}{p}-1}\|\varphi^\delta\|^{\frac{r}{p}}_{L^r(\mathbb{R}^d)}\|w_\delta\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

L'inégalité de Young devient

$$\begin{aligned}&C\|\nabla\varphi^\delta|\varphi^\delta|^{\frac{r-2}{2}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|\varphi^\delta\|^{\frac{r}{p}}_{L^r(\mathbb{R}^d)}\left(\frac{r}{4}\|(\psi^{(\delta)})^{\frac{r-4}{4}}\nabla\psi^{(\delta)}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right)^{1-\frac{2}{p}}\|w_\delta\|_{L^q(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \frac{\nu}{2}\|\nabla\varphi^\delta|\varphi^\delta|^{\frac{r-2}{2}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}+\frac{\nu}{\widetilde{p}}\left(\frac{r}{4}\|(\psi^{(\delta)})^{\frac{r-4}{4}}\nabla\psi^{(\delta)}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\right)^{\widetilde{p}(1-\frac{2}{p})}+\frac{C^p}{p\nu^{p-1}}\|\varphi^\delta\|^r_{L^r(\mathbb{R}^d)}\|w_\delta\|^p_{L^q(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Puisque $\frac{1}{2}+\frac{1}{p}+\frac{1}{\widetilde{p}}=1$ alors $\frac{2}{p}=1-\frac{2}{\widetilde{p}}$ i.e $\widetilde{p}(1-\frac{2}{p})=2$. On en déduit donc que

$$|I(t)| \leqslant \frac{\nu}{2}\int_0^t\|\nabla\varphi^\delta|\varphi^\delta|^{\frac{r-2}{2}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}+\frac{r^2\nu}{16\widetilde{p}}\int_0^t\|(\psi^{(\delta)})^{\frac{r-4}{4}}\nabla\psi^{(\delta)}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}+\frac{C^p}{p\nu^{p-1}}\int_0^t\|\varphi^\delta\|^r_{L^r(\mathbb{R}^d)}\|w_\delta\|^p_{L^q(\mathbb{R}^d)}.$$

La relation (3.29) devient :

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\|\varphi^\delta\|_{L^r(\mathbb{R}^d)}+\nu\frac{r-2}{4}\int_0^t\|\psi^{(\delta)}{}^{\frac{r-4}{4}}\nabla\psi^{(\delta)}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}+\int_0^t\nu\|\nabla\varphi^\delta|\varphi^\delta|^{\frac{r-2}{2}}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}&\\ \leqslant \frac{1}{r}\|\varphi_0\|_{L^r(\mathbb{R}^d)}+\frac{\nu}{2}\int_0^t\|\nabla\varphi^\delta|\varphi^\delta|^{\frac{r-2}{2}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}&\\ +\frac{r^2\nu}{16\widetilde{p}}\int_0^t\|(\psi^{(\delta)})^{\frac{r-4}{4}}\nabla\psi^{(\delta)}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}+\frac{C^p}{p\nu^{p-1}}\int_0^t\|\varphi^\delta\|^r_{L^r(\mathbb{R}^d)}\|w_\delta\|^p_{L^q(\mathbb{R}^d)}&\end{aligned}$$

i.e

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\|\varphi^\delta\|^r_{L^r(\mathbb{R}^d)}+\leqslant \frac{1}{r}\|\varphi_0\|^r_{L^r(\mathbb{R}^d)}-\frac{\nu}{2}\int_0^t\|\nabla\varphi^\delta|\varphi^\delta|^{\frac{r-2}{2}}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}&\\ +\frac{\nu}{4}(\frac{r^2}{4\widetilde{p}}-r+2)\int_0^t\|(\psi^{(\delta)})^{\frac{r-4}{4}}\nabla\psi^{(\delta)}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}+\frac{C^p}{p\nu^{p-1}}\int_0^t\|\varphi^\delta\|^r_{L^r(\mathbb{R}^d)}\|w_\delta\|^p_{L^q(\mathbb{R}^d)}&\end{aligned}$$

A ce niveau on voit qu'on ne peut pas avoir la relation

$$\frac{1}{r}\|\varphi^{\delta}\|^{r}_{L^{r}(\mathbb{R}^{d})} \leqslant \frac{1}{r}\|\varphi_{0}\|^{r}_{L^{r}(\mathbb{R}^{d})} + \frac{C^{p}}{p\nu^{p-1}}\int_{0}^{t}\|\varphi^{\delta}\|^{r}_{L^{r}(\mathbb{R}^{d})}\|w_{\delta}\|^{p}_{L^{q}(\mathbb{R}^{d})} \tag{3.30}$$

que l'auteur a utilisé par la suite.

Mais on continue l'exposé, et on espère corriger l'erreur ou contourner la difficulté.

Par le lemme de Grönwall, (3.30) donne

$$\|\varphi^{\delta}\|^{r}_{L^{r}(\mathbb{R}^{d})} \leqslant \|\varphi_{0}\|^{r}_{L^{r}(\mathbb{R}^{d})} \exp\left[\frac{C^{p}}{p\nu^{p-1}}\int_{0}^{t}\|\varphi^{\delta}\|^{r}_{L^{r}(\mathbb{R}^{d})}\|w_{\delta}\|^{p}_{L^{q}(\mathbb{R}^{d})}\right] \tag{3.31}$$

Enfin lorsqu'on tend r vers l'infini et puisque $\|w_{\delta}\|_{L^{q}(\mathbb{R}^{d})} \leqslant \|w\|_{L^{q}(\mathbb{R}^{d})}$, on a :

$$\|\varphi^{\delta}(t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^{d})} \leqslant \|\varphi_{0}\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^{d})} \exp\left[\frac{C^{p}}{p\nu^{p-1}}\int_{0}^{t}\|\varphi^{\delta}\|^{r}_{L^{r}(\mathbb{R}^{d})}\|w\|^{p}_{L^{q}(\mathbb{R}^{d})}\right] \tag{3.32}$$

Convergences

De la relation (3.32),et sachant que $w \in L^{p}(\mathbb{R}_{+}, L^{q}(\mathbb{R}^{d}))$, on a que la famille $(\varphi^{\delta})_{\delta}$ est bornée dans $L^{\infty}(\mathbb{R}_{+} \times \mathbb{R}^{d})$. On peut en extraire une sous-suite convergeant faiblement $\star$ dans $L^{\infty}(\mathbb{R}_{+} \times \mathbb{R}^{d})$ vers une fonction φ.

Grâce au lemme de Fatou, la relation (3.32) devient

$$\|\varphi(t)\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^{d})} \leqslant \|\varphi_{0}\|_{L^{\infty}(\mathbb{R}^{d})} \exp\left[\frac{C^{p}}{p\nu^{p-1}}\int_{0}^{t}\|\varphi^{\delta}\|^{r}_{L^{r}(\mathbb{R}^{d})}\|w\|^{p}_{L^{q}(\mathbb{R}^{d})}\right].$$

D'autres part, puisque $v_{\delta}\ , w_{\delta} \in L^{2}(\mathbb{R}_{+}, \dot{H}^{1}(\mathbb{R}^{d}))$, alors

$$v_{\delta}\ , w_{\delta} \rightarrow \text{ fortement dans } L^{2}(\mathbb{R}_{+}, \dot{H}(\mathbb{R}^{d})).$$

Lorsqu'on tend δ vers 0 dans l'équation (3.23), on obtient que φ est solution de (3.21) au sens des distributions. Ce qui achève la preuve. $\square$

3.2.3 Preuve du théorème d'unicité

Démonstration. 3.2.2

Préliminaires

Soit $\rho = \rho(x)$ un noyau régularisant et posons $\rho_{\varepsilon}(x) = \varepsilon^{-d}\rho(\dfrac{x}{\varepsilon})$. Soit $a_{\varepsilon} = a * \rho_{\varepsilon}$ on a :

$$\begin{aligned}
\partial_{t}a_{\varepsilon} + \nabla\cdot(a_{\varepsilon}v) - \nu\Delta a_{\varepsilon} &= \rho_{\varepsilon} * (\partial_{t}a - \nu\Delta a) + \nabla\cdot(a_{\varepsilon}v)\\
&= \nabla\cdot(a_{\varepsilon}v) - \rho_{\varepsilon} * \nabla\cdot(av) + \rho_{\varepsilon} * \nabla\cdot(wa)\\
&\overset{\operatorname{div} v=0}{=} v\cdot(\nabla\rho_{\varepsilon} * a) - \rho_{\varepsilon} * (v\cdot\nabla a) + \rho_{\varepsilon} * \nabla\cdot(wa) - \nabla\cdot(wa_{\varepsilon}) + \nabla\cdot(wa_{\varepsilon}),
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
\rho_{\varepsilon} * (v\cdot\nabla a)(x) &= \int_{\mathbb{R}^{d}} (v\cdot\nabla a)(y)\,\rho_{\varepsilon}(x-y)\,dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^{d}} \nabla\cdot(v\cdot a)(y)\,\rho_{\varepsilon}(x-y)\,dy\\
&= -\int_{\mathbb{R}^{d}} (v\cdot a)(y)\,(\nabla\rho_{\varepsilon}(x-\cdot))(y)\,dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^{d}} (v\cdot a)(y)\,\nabla\rho_{\varepsilon}(x-y)\,dy\\
&= ((v\cdot a) * \nabla\rho_{\varepsilon})(x)
\end{aligned}$$

donc
$$v \cdot \nabla a_\varepsilon - \rho_\varepsilon * (v \cdot \nabla a) = v \cdot \nabla (\rho_\varepsilon * a) - \nabla \rho_\varepsilon * (va) = C^\varepsilon$$
où C^ε est définit dans le lemme 3.1.1

Ainsi
$$\partial_t a_\varepsilon + \nabla \cdot (a_\varepsilon v) - \nu \Delta a_\varepsilon = \nabla (w a_\varepsilon) + C^\varepsilon + D^\varepsilon$$
avec
$$D^\varepsilon = \rho_\varepsilon * \nabla \cdot (wa) - \nabla \cdot (w a_\varepsilon) = \rho_\varepsilon * (w \cdot \nabla a) + \rho_\varepsilon * (a \nabla \cdot w) - w \cdot \nabla a_\varepsilon - a_\varepsilon \nabla \cdot w = D_1^\varepsilon + D_2^\varepsilon,$$
$$D_1^\varepsilon = \rho_\varepsilon * (w \cdot \nabla a) - w \cdot \nabla a_\varepsilon \text{ et } D_2^\varepsilon = \rho_\varepsilon * (a \nabla \cdot w) - a_\varepsilon \nabla \cdot w.$$

$$\begin{aligned}
D_2^\varepsilon(s,x) &= \rho_\varepsilon * (a(s) \nabla \cdot w(s))(x) - a_\varepsilon(s,x) \nabla \cdot w(s,x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y)(a(s,x-y) \nabla \cdot w(s,x-y)) dy - \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y)(a(s,x-y) \nabla \cdot w(s,x)) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y) a(s,x-y) \nabla \cdot [w(s,x-y) - w(s,x)] dy \\
&= - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \rho_\varepsilon(y) a(s,x-y) \cdot [w(s,x-y) - w(s,x)] dy \\
&+ \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y) \nabla \cdot a(s,x-y) \cdot [w(s,x-y) - w(s,x)] dy
\end{aligned}$$

Or par définition,
$$\begin{aligned}
D_1^\varepsilon(s,x) &= \rho_\varepsilon * (w(s) \nabla \cdot a(s))(x) - (w(s) \cdot \nabla \cdot a_\varepsilon(s))(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} [\rho_\varepsilon(y) w(s,x-y) \nabla \cdot a(s,x-y) - (w(s,x) \cdot \rho_\varepsilon(y) \nabla \cdot a_\varepsilon(s,x-y))] dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} [\rho_\varepsilon(y) \nabla \cdot a(s,x-y)[w(s,x-y) - w(s,x)] dy
\end{aligned}$$

Alors,
$$\begin{aligned}
D^\varepsilon(s,x) = 2 &\int_{\mathbb{R}^d} [\rho_\varepsilon(y) \nabla \cdot a(x-y)[w(s,x-y) - w(s,x)] dy \\
&- \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \rho_\varepsilon(y) a(x-y) \cdot [w(s,x-y) - w(s,x)] dy \\
&= 2 D_1^\varepsilon - \int_{\mathbb{R}^d} \nabla \rho_\varepsilon(y) a(x-y) \cdot [w(s,x-y) - w(s,x)] dy.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_1^\varepsilon(s,x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(y) \nabla \cdot a(x-y)[w(s,x-y) - w(s,x)] dy \\
&= \frac{1}{\varepsilon^d} \int_{\mathbb{R}^d} \rho(\frac{y}{\varepsilon}) \nabla \cdot a(x-y)[w(s,x-y) - w(s,x)] dy.
\end{aligned}$$

Par le changement de variable $y = \varepsilon z$, on a :
$$D_1^\varepsilon(s,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(z) \nabla \cdot a(x - \varepsilon z)[w(s,x-\varepsilon z) - w(s,x)] dz.$$

et par la formule de Taylor on a :

$$w(s,x-\varepsilon z)-w(s,x)=\int_0^1 \nabla w(s,x-r\varepsilon z)\cdot(-\varepsilon z)dr.$$

$$\begin{aligned}
D_1^\varepsilon(s,x) &= -\varepsilon\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^1 \nabla a(x-\varepsilon z)\cdot\nabla w(s,x-r\varepsilon z)\cdot(\rho(z)\otimes z)dzdr\\
|D_1^\varepsilon(s,x)| &\leqslant \varepsilon\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla a(s,x-\varepsilon z)||\nabla w(s,x-r\varepsilon z)||\rho(z)||z|dzdr\\
\int_{\mathbb{R}^d}|D_1^\varepsilon(s,x)|dx &\leqslant \varepsilon\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}|\rho(z)||z|\left[\int_{\mathbb{R}^d}|\nabla a(s,x-\varepsilon z)||\nabla w(s,x-r\varepsilon z)|dx\right]drdz\\
&\leqslant \varepsilon\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}|\rho(z)||z|\|\nabla a(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|\nabla w(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}dz\\
&\leqslant \varepsilon\|\nabla a(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|\nabla w(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\||\cdot|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\\
&\leqslant \varepsilon\||\cdot|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|\nabla a(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\|\nabla w(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|D_1^\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)}\leqslant\varepsilon\||\cdot|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\|a\|_{L^2(\mathbb{R}_+,\dot H^1(\mathbb{R}^d))}\|w\|_{L^2(\mathbb{R}_+,\dot H^1(R^d))},$$

donc,

$$\|D_1^\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)}\xrightarrow{\varepsilon\to0}0.$$

En posant

$$D_0^\varepsilon(s,x)=\int_{\mathbb{R}^d}a(s,x-y)[w(s,x-y)-w(s,x)]\cdot\nabla\rho_\varepsilon(y)dy,$$

on a

$$D_0^\varepsilon(s,x)=\frac{1}{\varepsilon^{d+1}}\int_{\mathbb{R}^d}a(s,x-y)[w(s,x-y)-w(s,x)]\cdot\nabla\rho(\frac{y}{\varepsilon})dy$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^d}a(s,x-\varepsilon y)[w(s,x-\varepsilon y)-w(s,x)]\cdot\nabla\rho(y)dy=\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}a(s,x-\varepsilon y)\nabla w(s;x-\varepsilon ry):(\nabla\rho(y)\otimes y)dy.$$

En conséquence

$$\|D^\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)}\xrightarrow{\varepsilon\to0}0.$$

Notons que même sans aucune régularité en temps $a_\varepsilon\in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+,\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d))$ et $\partial_t a_\varepsilon\in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+,\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d))$ ce qui suffit à rendre rigoureux les calculs à venir. Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases}-\partial_t\varphi-\nabla\cdot(\varphi v_\delta)-\nu\Delta\varphi=-{}^t\nabla\varphi\cdot w_\delta,\\ \varphi(0)=\varphi_0\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^d).\end{cases}\tag{3.33}$$

Cette équation admet une unique solution φ^δ appartenant à $\mathcal{C}([0,T],W^{m,p}(\mathbb{R}^d))\cap\mathcal{C}^1(()0,T),W^{m-2})$ pour tous $m,p\geqslant1$.

On sait que

$$\partial_t a_\varepsilon+\nabla\cdot(a_\varepsilon v)-\nu\Delta a_\varepsilon=\nabla\cdot(wa_\varepsilon)+C^\varepsilon+D^\varepsilon,$$

donc

$$\varphi^\delta\partial_t a_\varepsilon+\varphi^\delta\nabla\cdot(a_\varepsilon v)-\nu\varphi^\delta\Delta a_\varepsilon=\varphi^\delta\nabla\cdot(wa_\varepsilon)+\varphi^\delta(C^\varepsilon+D^\varepsilon).\tag{3.34}$$

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\varphi^\delta(s,x)\partial_t a_\varepsilon(s,x)dsdx \overset{a(0)=0}{=} \langle a_\varepsilon(T),\varphi_0\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} - \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} a_\varepsilon(s,x)\partial_t\varphi^\delta(s,x)dsdx. \tag{3.35}$$

Rappelons que $v_\delta(s)$, $\varphi^\delta(s)$ tendent vers zéro à l'infini ainsi que $\nabla\varphi^\delta(s)$, ceci justifie les deux lignes suivantes

$$\int_{\mathbb{R}^d}\nabla\cdot(a_\varepsilon v)\varphi^\delta(s,x)dsdx = -\int_{\mathbb{R}^d} a_\varepsilon(s,x)v(s,x)\nabla\varphi^\delta(s,x)dx, \tag{3.36}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Delta a_\varepsilon\varphi^\delta(s,x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} a_\varepsilon(s,x)\Delta\varphi^\delta(s,x)dx. \tag{3.37}$$

En intégrant (3.34)sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$, et en utilisant les relations (3.35), (3.36) et (3.37), on obtient

$$\begin{aligned}\langle a_\varepsilon(T),\varphi_0\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\varphi^\delta(s,x)(C^\varepsilon+D^\varepsilon)(s,x)dsdx\\ &+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} a_\varepsilon(s,x)(\partial_t\varphi^\delta(s,x)+v(s,x)\nabla\varphi^\delta(s,x)+\nu\Delta\varphi^\delta(s,x))dxds+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\varphi^\delta(s,x)\nabla\cdot(wa_\varepsilon(s,x))dsdx.\end{aligned} \tag{3.38}$$

Toujours à cause du comportement de $\varphi^\delta(s)$, $w(s)$ et $a_\varepsilon(s)$ à l'infini, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d}\varphi^\delta(s,x)\nabla\cdot(w(s,x)a_\varepsilon(s,x))dsdx = -\int_{\mathbb{R}^d}\nabla\varphi^\delta(s,x)w(s,x)a_\varepsilon(s,x)dx. \tag{3.39}$$

D'autre part, $\nabla\cdot v = 0$ donc

$$\nabla\cdot(\varphi^\delta(s,x)v(s,x)) = \nabla\varphi^\delta(s,x)v(s,x). \tag{3.40}$$

Ainsi (3.39) et (3.40) dans (3.38) donne

$$\begin{aligned}\langle a_\varepsilon(T),\varphi_0\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d),\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\varphi^\delta(s,x)(C^\varepsilon+\mathcal{D}^\varepsilon)(s,x)dsdx\\ &+\int_0^T\int_{\mathbb{R}^d} a_\varepsilon(s,x)\left[\partial_t\varphi^\delta(s,x)+\nabla\cdot(\varphi^\delta(s,x)v(s,x))+\nu\Delta\varphi^\delta(s,x)-^t\nabla\varphi^\delta(s,x)w(s,x)\right]dsdx.\end{aligned} \tag{3.41}$$

Convergences

Du lemme 3.1.1, on sait que $C^\varepsilon\in L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)$ pour chaque ε ainsi que D^ε. La famille $(\varphi^\delta)_\delta$ est bornée dans $L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)$ et donc y converge faiblement$\star$ vers un élément φ solution au sens des distributions du problème de Cauchy (3.33). Ainsi

$$\int_0^T\int_{R^d}\varphi^\delta(s,x)(C^\varepsilon+D^\varepsilon)(s,x)dsdx \xrightarrow{\delta\to 0} \int_0^T\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(s,x)(C^\varepsilon+D^\varepsilon)(s,x)dsdx.$$

D'autre part on sait d'après la définition de φ^δ que

$$-\partial_t\varphi^\delta-\nabla\cdot(\varphi^\delta v_\delta)-\nu\Delta\varphi^\delta+^t\nabla\varphi^\delta = -^t\nabla\varphi^\delta\cdot w_\delta.$$

Ainsi

$$-\partial_t\varphi^\delta - \nabla\cdot(\varphi^\delta v) - \nu\Delta\varphi^\delta +^t \nabla\varphi^\delta\cdot w = \nabla\cdot(\varphi^\delta v_\delta) - \nabla\cdot(\varphi^\delta v) +^t \nabla\varphi^\delta\cdot w -^t \nabla\varphi^\delta\cdot w_\delta = \nabla\cdot(\varphi^\delta(v_\delta - v)) +^t \nabla\varphi^\delta\cdot(w-w_\delta).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
A =& -\int_{\mathbb{R}^d} a_\varepsilon(s,x)\left[\partial_t\varphi^\delta(s,x) + \nabla\cdot(\varphi^\delta(s,x)\otimes v(s,x)) + \nu\Delta\varphi^\delta(s,x) -^t \nabla\varphi^\delta(s,x)w(s,x)\right]dx\\
=& \int_{\mathbb{R}^d} a_\varepsilon(s,x)\left[\nabla\cdot(\varphi^\delta(v_\delta - v)) +^t \nabla\varphi^\delta\cdot(w-w_\delta)\right]dx\\
\overset{IPP}{=}& -\int_{\mathbb{R}^d}\varphi^\delta(v_\delta - v)(s,x)\cdot\nabla a_\varepsilon(s,x)dsdx - \int_{R^d}\nabla\cdot(a_\varepsilon(s,x))(w-w_\delta)(s,x)\varphi^\delta(s,x)dx\\
=& -\int_{\mathbb{R}^d}(\varphi^\delta(v_\delta - v)(s,x)\cdot\nabla a_\varepsilon(s,x)dx) + \int_{\mathbb{R}^d}\nabla\cdot(a_\varepsilon(s,x)(w-w_\delta)(s,x))\varphi^\delta(s,x)dx\\
=& -\int_{\mathbb{R}^d}\varphi^\delta(s,x)\left[(v_\delta - v)(s,x\cdot\nabla a_\varepsilon(s,x)) + \nabla\cdot(a_\varepsilon)(s,x)(w(s,x)-w_\delta(s,x))\right]dx.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\|v_\delta - v\|_{L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta\|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)}\||\cdot|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$.

Par définition $v_\delta = \rho_\delta * v$ donc $v_\delta(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\rho_\delta(y)v(x-y)dy$

$$\begin{aligned}
v_\delta(x) - v(x) =& \int_{\mathbb{R}^d}\rho_\delta(y)[v(x-x) - v(x)]dy\\
=& \frac{1}{\delta^d}\int_{\mathbb{R}^d}\rho(\frac{y}{\delta})[v(x-y)-v(x)]dy\\
v_\delta(x) - v(x) =& \int_{\mathbb{R}^d}\rho(y)[v(x-\delta y)-v(x)]dy\\
=& -\delta\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^1\rho(y)\nabla v(x-r\delta y) : ydrdy\\
|v_\delta(x) - v(x)| \leqslant& \delta\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}|\rho(y)||\nabla v(x-r\delta y)||y|dydr\\
\leqslant& \delta\int_0^1\int_{\mathbb{R}^d}[|y||\rho(y)|]^{\frac{1}{2}}|\nabla v(x-r\delta y)|[|y||\rho(y)|]^{\frac{1}{2}}dydr\\
\leqslant& \delta\int_0^1\left[\int_{\mathbb{R}^d}|y||\rho(y)|dy\right]^{\frac{1}{2}}\left[\int_{\mathbb{R}^d}|y||\rho(y)||\nabla v(x-r\delta y)|^2dy\right]^{\frac{1}{2}}dr\\
\leqslant& \delta\||\cdot|\rho\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\mathbb{R}^d)}\int_0^1\left[\int_{\mathbb{R}^d}|y||\rho(y)||\nabla v(x-r\delta y)|^2dy\right]^{\frac{1}{2}}dr
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
|v_\delta(x)-v(x)|^2 &\leqslant \delta^2 \||\cdot|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \left[\int_0^1 \left[\int_{\mathbb{R}^d} |y||\rho(y)||\nabla v(x-r\delta y)|^2 dy\right]^{\frac{1}{2}} dr\right]^2 \\
&\leqslant \delta^2 \||\cdot|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |y||\rho(y)||\nabla v(x-r\delta y)|^2 dy dr \\
\int_{\mathbb{R}^d} |v_\delta(x)-v(x)|^2 dx &\leqslant \delta^2 \||\cdot|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} \left[\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla v(x-r\delta y)|^2 dx\right] |y||\rho(y)| dy dr \\
&\leqslant \delta^2 \||\cdot|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |y||\rho(y)| \|\nabla v(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} dy dr \\
&\leqslant \delta^2 \||\cdot|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|\nabla v(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}
$$

On conclu donc que

$$
\|v_\delta - v\|_{L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)} \leqslant \delta \||\cdot|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|\nabla v\|_{L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)}.
$$

En conséquence

$$
\left|\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^\delta(s,x)(v_\delta - v)(s, x\cdot\nabla a_\varepsilon(s,x))\right| \leqslant \|\varphi^\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)} \|v_\delta - v\|_{L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)} \|\nabla a_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)}
$$

et donc pour chaque $\varepsilon > 0$

$$
\left|\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^\delta(s,x)(v_\delta - v)(s, x\cdot\nabla a_\varepsilon(s,x))\right| \xrightarrow{\delta\to 0} 0.
$$

Montrons maintenant que $\|\nabla\cdot((w-w_\delta)a_\varepsilon)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)} \xrightarrow{\delta\to 0} 0$.
$\nabla\cdot((w_\delta - w)a_\varepsilon) = (w_\delta - w)\cdot\nabla a_\varepsilon + a_\varepsilon \nabla\cdot(w_\delta - w)$. Donc

$$
\|\nabla\cdot((w_\delta - w)a_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)} \leqslant \|w_\delta - w\|_{L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)} \|\nabla a_\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)} + \|a_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)} \|\nabla\cdot(w_\delta - w)\|_{L^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^d)}.
$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla w_\delta - \nabla w)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\delta(y)\left[\nabla w(x-y) - \nabla w(x)\right] dy \\
&= \tfrac{1}{\delta^d} \int_{\mathbb{R}^d} \rho(\frac{y}{\delta^d})\left[\nabla w(x-y) - \nabla w(x)\right] dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \rho(y)\left[\nabla w(x-\delta y) - \nabla w(x)\right] dy \\
|\nabla(w_\delta - w)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |\rho(y)|^{\frac{1}{2}} \left[|\nabla w_(x-\delta y) - \nabla w(x)||\rho(y)|^{\frac{1}{2}}\right] dy \\
&\leq \|\rho\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\mathbb{R}^d)} \left[\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla w(x-\delta y) - \nabla w(x)|^2 |\rho(y)| dy\right]^{\frac{1}{2}} \\
|\nabla(w_\delta - w)(x)|^2 &\leq \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla w(x-\delta y) - \nabla w(x)|^2 |\rho(y)| dy \\
\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla(w_\delta - w)(x)|^2 dx &\leq \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} |\rho(y)| \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla w(x-\delta y) - \nabla w(x)|^2 dx dy \\
&\leq \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} |\rho(y)| \|\nabla w(\cdot - \delta y) - \nabla w\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} dy
\end{aligned}
$$

$$\|\nabla(w_\delta - w)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \int_{\mathbb{R}^d} |\rho(y)| \|\nabla w(\cdot - \delta y) - \nabla w\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} dy$$

$$\begin{aligned}\|\nabla(w_\delta - w)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d)} &\le \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\rho(y)| \|\nabla w(\cdot - \delta y) - \nabla w\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} dyds \\ &\le \|\rho\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \int_{|y|\leqslant 1} |\rho(y)| \|\nabla w(\cdot - \delta y) - \nabla w\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^d))} dy \\ &\le \|\rho\|^2_{L^1(\mathbb{R}^d)} \sup_{h, |h|\leqslant\delta} \|\nabla w(\cdot - h) - \nabla w\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{R}^d))},\end{aligned}$$

et par suite

$$\|\nabla(w_\delta - w)\|_{L^2(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d)} \xrightarrow{\delta\to 0} 0.$$

En conséquence

$$\left| \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \varphi^\delta(s,x) \nabla \cdot ((w - w_\delta)(s,x)) \otimes a_\varepsilon(s,x) dxds \right|$$
$$\le \|\varphi^\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d)} \|\nabla . (w - w_\delta)\|_{L^2(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d)} \|a_\varepsilon(sx)\|_{L^2(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d)} \xrightarrow{\delta\to 0} 0.$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$, on a :

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \big(\varphi^\delta(v_\delta - v)\big) \cdot \nabla a_\varepsilon(s,x) dxds + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \big(\varphi^\delta(s,x) \nabla \cdot (w - w_\delta)\big)(s,x) a_\varepsilon(s,x) dxds \xrightarrow{\delta\to 0} 0.$$

La relation (3.41)

$$\langle a_\varepsilon(T), \varphi_0 \rangle_{(\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d), \mathcal{D}(\mathbb{R}^d))} = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(s,x) \left(C^\varepsilon + D^\varepsilon\right)(s,x) dsdx. \tag{3.42}$$

On a montré que

$$\|C^\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d)} \xrightarrow{\delta\to 0} 0 \text{ et } \|D^\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^d)} \xrightarrow{\delta\to 0} 0.$$

Ainsi en faisant tendre ε vers 0 dans la relation précédente et du fait que

$$\|a_\varepsilon(T) - a(T)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow{\delta\to 0} 0$$

on obtient $\langle a(T), \varphi_0 \rangle = 0$. Ceci pour toute fonction test, alors $a(T)$ est nulle au sens des distributions et par conséquent a est nulle au sens des distributions sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d$. □

3.2.4 Preuve du théorème de Serrin

Démonstration. 3.2.1

Soit $\Omega := \nabla \wedge u$ et $\Omega_0 := \nabla \wedge u_0$
En prenant le rotationnel de l'équation (3.20) on obtient :

$$\begin{cases} \partial_t \Omega + \nabla \cdot (\Omega \otimes u) - \Delta \Omega = \nabla \cdot (u \otimes \Omega) \\ \Omega(0) = \Omega_0 \end{cases} \tag{3.43}$$

Soit $\chi = \chi(t) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ telle que supp$\chi \subset]T_1, T_2[$, $\varphi = \varphi(t) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}_+)$ une autre fonction telle que supp$\chi \subset \{\varphi \equiv 1\}$. Désignons par $\Omega' = \chi\Omega$ et $u' = \varphi u$, on a :

$$\begin{aligned} \partial_t \Omega' + \nabla \cdot (\Omega' \otimes u) - \Delta \Omega' &= \chi \partial_t \Omega + \Omega \partial_t \chi + \chi \nabla \cdot (\Omega \otimes u) - \chi \Delta \Omega \\ &= \chi(\partial_t \Omega - \Delta \Omega) + \chi \nabla \cdot (\Omega \otimes u) + \Omega \partial_t \chi \\ &= \chi(\nabla \cdot (u \otimes \Omega) - \nabla \cdot (\Omega \otimes u)) + \chi \nabla \cdot (\Omega \otimes u) + \Omega \partial_t \chi \\ &= \chi \varphi \nabla \cdot (\Omega \otimes u) + \Omega \partial_t \chi \text{ car supp}\chi \subset \{\varphi \equiv 1\}. \\ &= \nabla \cdot (\Omega' \otimes u') + \Omega \partial_t \chi. \end{aligned}$$

Par ailleurs supp$\chi \subset]T_1, T_2[$, alors $\chi(0) = 0$ et donc $\Omega'(0) = 0$. On conclut alors que Ω' est solution du

$$\begin{cases} \partial_t \Omega' + \nabla \cdot (\Omega' \otimes u) - \Delta \Omega' = \nabla \cdot (\Omega' \otimes u') + \Omega \partial_t \chi, \\ \Omega'(0) = 0. \end{cases} \tag{3.44}$$

Nous allons construire une solution Ω'' dans $L^\infty(\mathbb{R}_+, L^2(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{T}^3))$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t \Omega'' + \nabla \cdot (\Omega'' \otimes u) - \Delta \Omega'' = \nabla \cdot (u' \otimes \Omega'') + \Omega \partial_t \chi, \\ \Omega'(0) = 0. \end{cases} \tag{3.45}$$

Soit $\delta > 0$ et u_δ, u'_δ et Ω_δ des régularisations respectives en espace de u, u' et Ω

Grâce aux méthodes de Friedrichs combinées avec les estimations du noyau de la chaleur, on montre que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t \Omega'' + \nabla \cdot (\Omega'' \otimes u_\delta) - \Delta \Omega'' = \nabla \cdot (u'_\delta \otimes \Omega'') + \Omega_\delta \partial_t \chi, \\ \Omega'(0) = 0, \end{cases} \tag{3.46}$$

admet une unique solution Ω''_δ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{T}^3))$ pour tout $p \geqslant 2$. De plus Ω''_δ est lisse en espace et toutes ses dérivées sont dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, L^p(\mathbb{T}^3))$. En particulier Ω''_δ et ses dérivées d'ordre au plus deux s'annule à l'infini. On sait par ailleurs que $u_\delta(s)$ s'annule à l'infini, ceci justifie les intégrations par parties suivantes.

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \Omega''_\delta(x,s) \partial_t \Omega''_\delta(x,s) dx ds = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}^3} \int_0^t \partial_t |\Omega''_\delta(x,s)|^2 dx ds = \frac{1}{2} \|\Omega''_\delta(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}, \tag{3.47}$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \Omega''_\delta(x,s) \Delta \Omega''_\delta(x,s) = -\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \nabla \Omega''_\delta(x,s) \cdot \nabla \Omega''_\delta(x,s) = -\int_0^t \|\nabla \Omega''_\delta(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} ds, \tag{3.48}$$

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \Omega''_\delta \nabla \cdot (\Omega''_\delta \otimes u_\delta) = -\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \nabla \Omega''_\delta : \Omega''_\delta \otimes u_\delta = -\frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \nabla |\Omega''_\delta|^2 u_\delta = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} |\Omega''_\delta|^2 \nabla \cdot u_\delta = 0 \tag{3.49}$$

car $\operatorname{div} u_\delta = \operatorname{div} u = 0$.

En Multipliant par Ω''_δ l'équation (3.46) satisfaite par Ω''_δ et en utilisant (3.47), (3.48) et (3.49), on obtient

$$\frac{1}{2} \|\Omega''_\delta(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} + \int_0^t \|\nabla \Omega''_\delta(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} ds = \int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \Omega''_\delta \cdot (\nabla \cdot (u'_\delta \otimes \Omega''_\delta) + \Omega_\delta \partial_t \chi). \tag{3.50}$$

Il reste à estimer le second membre de (3.50).

$$\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \Omega''_\delta \cdot \nabla \cdot (u'_\delta \otimes \Omega''_\delta) = -\int_0^t \int_{\mathbb{T}^3} \nabla \Omega''_\delta : u'_\delta \otimes \Omega''_\delta \leqslant \int_0^1 \|\nabla \Omega''_\delta(s)\|_{L^2(\mathbb{T}^3)} \|u'_\delta(s)\|_{L^q(\mathbb{T}^3)} \|\Omega''_\delta(s)\|_{L^{\tilde{q}}(\mathbb{T}^3)}. \tag{3.51}$$

Remarquons que $\frac{3}{q} + \frac{2}{p} = 1$ donc par interpolation, on a :

$$\|\Omega''_\delta\|_{\dot{H}^{\frac{3}{q}}(\mathbb{T}^3)} \leqslant \|\Omega''_\delta\|^{\frac{3}{q}}_{\dot{H}^1(\mathbb{T}^3)} \|\Omega''_\delta\|^{\frac{2}{p}}_{L^2(\mathbb{T}^3)},$$

i.e

$$\|\Omega''_\delta\|_{\dot{H}^{\frac{3}{q}}(\mathbb{T}^3)} \leqslant \|\nabla\Omega''_\delta\|^{\frac{3}{q}}_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|\Omega''_\delta\|^{\frac{2}{p}}_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

Soit $\widetilde{q}$ tel que $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{\widetilde{q}}=1$, i.e

$$\frac{1}{\widetilde{q}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{q}.$$

Cette dernière relation nous assure l'injection $\dot{H}^{\frac{3}{q}}(\mathbb{T}^3)\hookrightarrow L^{\widetilde{q}}(\mathbb{T}^3)$. Il existe donc une constante $\widetilde{C}$ qui dépend uniquement de la dimension d telle que

$$\|\Omega''_\delta(s)\|_{L^{\widetilde{q}}(\mathbb{T}^3)} \leqslant \widetilde{C}\|\Omega''_\delta\|_{\dot{H}^{\frac{3}{q}}(\mathbb{T}^3)} \leqslant \widetilde{C}\|\nabla\Omega''_\delta\|^{\frac{3}{q}}_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|\Omega''_\delta\|^{\frac{2}{p}}_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

Alors (3.51) devient

$$\int_0^t\int_{\mathbb{T}^3}\Omega''_\delta\cdot(\nabla\cdot(u'_\delta)\otimes\Omega''_\delta) \leqslant \widetilde{C}\int_0^1\|\nabla\Omega''_\delta(s)\|^{1+\frac{3}{q}}_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|u'_\delta(s)\|_{L^q(\mathbb{T}^3)}\|\Omega''_\delta\|^{\frac{2}{p}}_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

On a :

$$\frac{2}{p'}=2-\frac{2}{p}=2-(1-\frac{3}{p})=1+\frac{3}{p}.$$

En appliquant l'inégalité de Young

$$|ab| \leqslant \frac{|a|^{p'}}{p'}+\frac{|b|^p}{p}$$

avec

$$a=\widetilde{a}\|\nabla\Omega''_\delta(s)\|^{1+\frac{3}{p}}_{L^2(\mathbb{T}^3)} \text{ et } b=\frac{\widetilde{C}}{\widetilde{a}}\|u'_\delta(s)\|_{L^q(\mathbb{T}^3)}\|\Omega''_\delta\|^{\frac{2}{p}}_{L^2(\mathbb{T}^3)}$$

où $\widetilde{a}$ est à préciser plus tard, on obtient

$$\|\nabla\Omega''_\delta(s)\|^{1+\frac{3}{p}}_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|u'_\delta(s)\|_{L^q(\mathbb{T}^3)}\|\Omega''_\delta\|^{\frac{2}{p}}_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leqslant \frac{\widetilde{a}^{p'}}{p'}\|\nabla\Omega''_\delta(s)\|^{p'(1+\frac{3}{p})}_{L^2(\mathbb{T}^3)}+\frac{\widetilde{C}^p}{p\widetilde{a}^p}\|u'_\delta(s)\|^p_{L^q(\mathbb{T}^3)}\|\Omega''_\delta\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

Prenons $\widetilde{a}$ tel que $\widetilde{a}^{p'}=\dfrac{p'}{2}$ et posons $C=2\dfrac{\widetilde{C}}{p\widetilde{a}^p}$. En remarquant que $p'=\dfrac{2p}{p+3}$, on voit que C dépend uniquement de p et on a :

$$\|\nabla\Omega''_\delta(s)\|^{1+\frac{3}{p}}_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|u'_\delta(s)\|_{L^q(\mathbb{T}^3)}\|\Omega''_\delta\|^{\frac{2}{p}}_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leqslant \frac{1}{2}\|\nabla\Omega''_\delta(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}+\frac{C}{2}\|u'_\delta(s)\|^p_{L^q(\mathbb{T}^3)}\|\Omega''_\delta\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}. \quad (3.52)$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz puis celle de Young on a :

$$\int_0^t\int_{\mathbb{T}^3}\Omega''_\delta\cdot\Omega_\delta\partial_t\chi \leqslant \int_0^t\|\Omega''_\delta\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}\|\Omega_\delta\|_{L^2(\mathbb{T}^3)}|\partial_t\chi| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t\|\Omega''_\delta\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\|\Omega_\delta(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}|\partial_t\chi|^2 \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t\|\Omega''_\delta(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}+\frac{1}{2}\|\partial_t\chi\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}\int_0^t\|\Omega_\delta(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

On conclut que

$$\left|\int_0^t\int_{\mathbb{T}^3}\Omega''_\delta\cdot(\nabla\cdot(u'_\delta\otimes\Omega''_\delta)+\Omega_\delta\partial_t\chi)\right| \leqslant \frac{1}{2}\int_0^t\|\nabla\Omega''_\delta(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}+\frac{1}{2}\int_0^t\left(1+C\|u'_\delta(s)\|^p_{L^q(\mathbb{T}^3)}\right)\|\Omega''_\delta(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}$$
$$+\frac{1}{2}\|\partial_t\chi\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}\int_0^t\|\Omega_\delta(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

Par suite la relation (3.50) devient

$$\|\Omega''_\delta(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}+\int_0^t \|\nabla\Omega''_\delta(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}ds \leqslant \int_0^t (1+C\|u'_\delta(s)\|^p_{L^q(\mathbb{T}^3)})\|\Omega''_\delta(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}ds+\|\partial_t\chi\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}\|\Omega_\delta(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

Puisque u'_δ et Ω_δ sont des régularisations respectives en espace de u' et Ω, alors

$$\|u'_\delta(s)\|_{L^q(\mathbb{T}^3)} \leqslant \|u'(s)\|_{L^q(\mathbb{T}^3)} \text{ et } \|\Omega_\delta(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)} \leqslant \|\Omega(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

Ainsi

$$\|\Omega''_\delta(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}+\int_0^t \|\nabla\Omega''_\delta(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}ds \leqslant \int_0^t (1+C\|u'(s)\|^p_{L^q(\mathbb{T}^3)})\|\Omega''_\delta\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}ds+\|\partial_t\chi\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}\|\Omega\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}$$

qu'on peut réécrire comme suit :

$$\|\Omega''_\delta(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}+\int_0^t \|\nabla\Omega''_\delta(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}ds \leqslant \int_0^t (1+C\|u'(s)\|^p_{L^q(\mathbb{T}^3)})\left(\|\Omega''_\delta\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}+\int_0^s \|\nabla\Omega''_\delta(\tau)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}d\tau\right)$$
$$+\|\partial_t\chi(s)\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}\|\Omega\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}.$$

D'après le théorème de Grönwall, on obtient :

$$\|\Omega''_\delta(t)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}+\int_0^t \|\nabla\Omega''_\delta(s)\|^2_{L^2(\mathbb{T}^3)}ds \leqslant \|\partial_t\chi\|^2_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}\|\Omega\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{T}^3)}\exp\left(t+C\int_0^t \|u'(s)\|^p_{L^q(\mathbb{T}^3)}ds\right).$$

Par hypothèse $u \in L^p(]T_1,T_2[,L^q(\mathbb{T}^3))$ et donc $u' \in L^p(\mathbb{R}_+,L^q(\mathbb{T}^3))$, ce qui permet d'avoir, d'après la relation précédente,

$$\sup_\delta \|\Omega''_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,L^2(\mathbb{T}^3))} < \infty \text{ et } \sup_\delta \|\nabla\Omega_\delta\|_{L^2(\mathbb{R}_+,L^2(\mathbb{T}^3))} < \infty.$$

Il existe donc une sous-famille qui converge faiblement dans $L^2(\mathbb{R}_+,\dot{H}^1(\mathbb{T}^3))$ et qui converge faiblement $\star$ dans $L^\infty(\mathbb{R}_+,L^2(\mathbb{T}^3))$ vers un élément Ω''. Il reste à montrer que la limite faible Ω''_δ est solution de (3.45) au sens des distribution.

Il est évident que $\Omega''(0)=0$.

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{T}^3)$ on a successivement ;

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{T}^3}\partial_t\Omega''_\delta\psi = -\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{T}^3}\Omega''_\delta\partial_t\psi \xrightarrow{\delta\to0} -\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{T}^3}\Omega''\partial_t\psi = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{T}^3}\partial_t\Omega''\psi,$$

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{T}^3}\Delta\Omega''_\delta\psi = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{T}^3}\Omega''_\delta\Delta\psi \xrightarrow{\delta\to0} \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{T}^3}\Omega''\Delta\psi = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{T}^3}\Delta\Omega''\psi,$$

Montrons que $\nabla\cdot(\Omega''_\delta\otimes u_\delta) \rightharpoonup \nabla\cdot(\Omega''\otimes u)$ dans $L^2(\mathbb{R}_+,L^1(\mathbb{T}^3))$.

Puisque $\operatorname{div} u = \operatorname{div} u_\delta = 0$, alors $\nabla\cdot(\Omega''_\delta\otimes u_\delta) = \Omega''_\delta\cdot\nabla u_\delta$ et $\nabla\cdot(\Omega''_\delta\otimes u) = \Omega''_\delta\cdot\nabla u$ et donc

$$\nabla\cdot(\Omega''_\delta\otimes u_\delta) - \nabla\cdot(\Omega''\otimes u) = \Omega''_\delta\cdot\nabla u_\delta - \Omega''_\delta\cdot\nabla u = \Omega''_\delta\cdot\nabla(u_\delta-u)+(\Omega''_\delta-\Omega)\cdot\nabla u.$$

Pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+\times\mathbb{T}^3)$,

$$\int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{T}^3}(\Omega''_\delta\cdot\nabla u)\psi = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{T}^3}\Omega''_\delta\cdot(\psi\nabla u) \xrightarrow{\delta\to0} \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{T}^3}\Omega''\cdot(\psi\nabla u) = \int_{\mathbb{R}_+}\int_{\mathbb{T}^3}(\Omega''\cdot\nabla u)\psi.$$

Par ailleurs, u est supposé être solution de Laray des équations de Navier-Stokes, donc $u \in L^2(]T_1,T_2[,\dot{H}^1(\mathbb{T}^3))$ et donc u_δ et u'_δ convergent fortement vers u et u' respectivement dans $L^2(\mathbb{R}_+,\dot{H}^1(\mathbb{T}^3))$. Ce qui permet d'avoir

$$\|\Omega''_\delta\cdot\nabla(u_\delta-u)\|_{L^2(\mathbb{R}_+,L^1(\mathbb{T}^3))} \leqslant \|\Omega''_\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+,L^2(\mathbb{T}^3))}\|\nabla(u_\delta-u)\|_{L^2(\mathbb{R}_+\times L^2(\mathbb{T}^3))} \xrightarrow{\delta\to0} 0.$$

On conclut que $\nabla\cdot(\Omega''_\delta\otimes u_\delta)\rightharpoonup\nabla\cdot(\Omega''\otimes u)$ dans $L^2(\mathbb{R}_+,L^1(\mathbb{T}^3))$. On montre de la même manière que $\nabla\cdot(\Omega''_\delta\otimes u'_\delta)\rightharpoonup\nabla\cdot(\Omega''\otimes u')$ dans $L^2(\mathbb{R}_+,L^1(\mathbb{T}^3))$. De ce qui précède, Ω''_δ est solution de (3.45).

Maintenant soit $\widetilde{\Omega}:=\Omega'-\Omega''$. Puisque Ω'' est solution de (3.45) et Ω' vérifie (3.44) alors $\widetilde{\Omega}$ est solution du problème

$$\begin{cases}\partial_t\widetilde{\Omega}+\nabla\cdot(\widetilde{\Omega}\otimes u)-\Delta\widetilde{\Omega}=\nabla\cdot(u'\otimes\widetilde{\Omega}),\\ \widetilde{\Omega}(0)=0.\end{cases}$$

Rappelons que u et u' sont dans $L^2(\mathbb{R}_+,\dot{H}^1(\mathbb{T}^3))$, par hypothèse $u'\in L^p(\mathbb{R}_+,L^q(\mathbb{T}^3))$. Par ailleurs $\Omega''\in L^2(\mathbb{R}_+,\dot{H}^1(\mathbb{T}^3))\cap L^\infty(\mathbb{R}_+,L^2(\mathbb{T}^3))$ et du fait que $\widetilde{\Omega}$ est la solution de Laray des équations de Navier Stokes entrainent que $\widetilde{\Omega}\in L^2(\mathbb{R}_+\times\mathbb{T}^3)$. En appliquant le théorème 3.2.3 on déduit que $\widetilde{\Omega}\equiv 0$ ce qui implique que $\Omega'=\Omega''\in L^2(\mathbb{R}_+,\dot{H}^1(\mathbb{T}^3))\cap L^\infty(\mathbb{R}_+,L^2(\mathbb{T}^3))$, donc

$$\Omega\in L^\infty_{\text{loc}}(]T_1,T_2[,L^2(\mathbb{T}^3))\cap L^2_{\text{loc}}(]T_1,T_2[,\dot{H}^1(\mathbb{T}^3))$$

et puisque $\Omega=\nabla\wedge u$ alors

$$u\in L^\infty_{\text{loc}}(]T_1,T_2[,\dot{H}^1(\mathbb{T}^3))\cap L^2_{\text{loc}}(]T_1,T_2[,\dot{H}^2(\mathbb{T}^3)).$$

On va procéder à un raisonnement par récurrence pour améliorer la régularité de Ω et de u.

Nous avons besoin de montrer que, pour tout $s\in\mathbb{N}$,

$$\Omega\in L^\infty_{\text{loc}}(]T_1,T_2[,\dot{H}^s(\mathbb{T}^3))\cap L^2_{\text{loc}}(]T_1,T_2[,\dot{H}^{s+1}(\mathbb{T}^3))$$

ce qui équivaut à

$$u\in L^\infty_{\text{loc}}(]T_1,T_2[,\dot{H}^{s+1}(\mathbb{T}^3))\cap L^2_{\text{loc}}(]T_1,T_2[,\dot{H}^{s+2}(\mathbb{T}^3)).$$

Le cas $s=0$ est celui qu'on a démontré.

Pour passer de s pour $s+1$. On dérive (3.44) par rapport à l'espace et on remarque que $\partial^{s+1}\Omega'$ vérifie

$$\begin{cases}\partial_t\partial^{s+1}\Omega'+\nabla\cdot(u\otimes\partial^{s+1}\Omega')-\Delta\partial^{s+1}\Omega'=\nabla(\partial^{s+1}\Omega'\otimes u')+(\text{l.o.t en }\Omega'),\\ \partial^{s+1}\Omega'(0)=0\end{cases}$$

où l.o.t désignent les termes de dégrées inférieur.

Suivant les mêmes lignes que celles précédentes on montre que le problème de Cauchy

$$\begin{cases}\partial_t\Omega''+\nabla\cdot(u\otimes\Omega'')-\Delta\Omega''=\nabla(\Omega''\otimes u')+(\text{l.o.t en }\Omega'),\\ \partial^{s+1}\Omega'(0)=0\end{cases}$$

admet une solution $\Omega''\in L^2(\mathbb{R}_+,\dot{H}^1(\mathbb{T}^3))\cap L^\infty(\mathbb{R}_+,L^2(\mathbb{T}^3))$.

On pose à nouveau $\widetilde{\Omega}=\Omega''-\partial^{s+1}\Omega$ puis faire appel au théorème 3.2.3 qui nous permettra d'obtenir $\partial^{s+1}\Omega'\in L^\infty\left(\mathbb{R}_+,L^2\left(\mathbb{T}^3\right)\right)\cap L^2\left(\mathbb{R}_+,\dot{H}^1\left(\mathbb{T}^3\right)\right)$ et donc

$$\Omega\in L^\infty_{\text{loc}}(]T_1,T_2[,\dot{H}^{s+1}(\mathbb{T}^3))\cap L^2_{\text{loc}}(]T_1,T_2[,\dot{H}^{s+2}(\mathbb{T}^3))$$

i.e

$$u\in L^\infty_{\text{loc}}(]T_1,T_2[,\dot{H}^{s+2}(\mathbb{T}^3))\cap L^2_{\text{loc}}(]T_1,T_2[,\dot{H}^{s+3}(\mathbb{T}^3)).$$

En conclusion, $\forall s\in\mathbb{N}$

$$u\in L^\infty_{\text{loc}}(]T_1,T_2[,\dot{H}^{s+1}(\mathbb{T}^3))\cap L^2_{\text{loc}}(]T_1,T_2[,\dot{H}^{s+2}(\mathbb{T}^3)).$$

Les dérivées temporelles peuvent maintenant être gérées par un argument de récurrence similaire. $\square$

3.3 Équations d'Euler sur le tore 2D

Théorème 3.3.1. *Soit $d \geqslant 3$ un entier. Soit ν et T deux entiers strictement positif. Soit u une solution forte des équations de Navier Stokes*

$$\begin{cases} \partial_t u + \nabla \cdot (u \otimes u) - \nu \Delta u = -\nabla p, \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases}$$

sur $]0, T[\, \times \mathbb{R}^d$. Alors, il existe une constante C dépendant uniquement de d tel que pour tout $0 < t < T$ et pour tout $2 \leq p < \infty$, $d < q \leq \infty$ satisfaisant $\dfrac{2}{p} + \dfrac{d}{q} = 1$, on ait,

$$\|\Omega(t)\|_{L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)} \leq \|\Omega(0)\|_{L^1(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)} \exp\left[\frac{C^p}{p\nu^{p-1}} \int_0^t \|u(s)\|^p_{L^q(\mathbb{R}^d)} ds\right].$$

Démonstration. Soit u une solution forte des équations de Navier Stokes

$$\begin{cases} \partial_t u + \nabla \cdot (u \otimes u) - \nu \Delta u = -\nabla p, \\ \nabla \cdot u = 0. \end{cases} \tag{3.53}$$

En posant $\Omega = \nabla \wedge u$, on obtient

$$\partial_t \Omega + \nabla \cdot (\Omega \otimes u) - \nu \Delta \Omega = \nabla \cdot (u \otimes \Omega).$$

Soit $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ et $\forall \varepsilon > 0$ on pose

$$\rho_\varepsilon = \varepsilon^{-d} \rho(\tfrac{\cdot}{\varepsilon}),\ \Omega_\varepsilon = \Omega * \rho_\varepsilon \text{ et } u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon.$$

Pour tout $\delta > 0$, et pour tous réels $0 < s < t < T$, problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t \varphi + \nabla . (\varphi \otimes u_\delta) - \nu \Delta \varphi = \nabla \cdot (u_\delta \otimes \varphi), \\ \varphi(t) = \varphi_0 \in \mathcal{D}\left(\mathbb{R}^d\right) \end{cases} \tag{3.54}$$

admet une unique solution φ^δ dans $\mathcal{C}([s,t], L^p(\mathbb{R}^d))$. De plus pour tout $\tau \in [s,t]$, $\varphi^\delta(\tau)$ et $\nabla \varphi^\delta(\tau)$ s'annule à l'infini.

En multipliant par Ω_ε l'équation (3.54) satisfaite par φ^δ, on a :

$$\Omega_\varepsilon \partial_t \varphi^\delta + \Omega_\varepsilon \nabla \cdot \left(\varphi^\delta \otimes u_\delta\right) - \nu \Omega_\varepsilon \Delta \varphi^\delta = \Omega_\varepsilon \nabla \cdot \left(u_\delta \otimes \varphi^\delta\right) + \Omega_\varepsilon \left(C^\varepsilon + D^\varepsilon\right).$$

Comme dans la preuve du théorème (3.1.1), on montre qu'en intégrant cette dernière relation et en faisant tendre δ puis ε vers 0, on obtient :

$$\langle \Omega_\delta(t), \varphi_0 \rangle_{L^1(\mathbb{R}^d), L^\infty(\mathbb{R}^d)} = \langle \Omega_\delta(s), \varphi(t-s) \rangle_{L^1(\mathbb{R}^d), L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

où φ est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t \varphi + \nabla . (\varphi \otimes u_\delta) - \nu \Delta \varphi = \nabla \cdot (u_\delta \otimes \varphi), \\ \varphi(t) = \varphi_0 \end{cases}$$

et satisfaisant la relation (3.22).

Ainsi

$$\begin{aligned} \left| \langle \Omega_\delta(t), \varphi_0 \rangle_{L^1(\mathbb{R}^d), L^\infty(\mathbb{R}^d)} \right| &\leqslant \|\Omega(s)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|\varphi(t-s)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \|\Omega(s)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \|\varphi_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \exp\left[\frac{C^p}{p\nu^{p-1}} \int_s^t \|u(\tau)\|^p_{L^q(\mathbb{R}^d)} d\tau\right]. \end{aligned}$$

En prenant le supremum sur les φ_0 on a :

$$\|\Omega(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\Omega(s)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \exp\left[\frac{C^p}{p\nu^{p-1}}\int_s^t \|u(\tau)\|^p_{L^q(\mathbb{R}^d)} d\tau\right].$$

Puis lorsqu'on tend $s \to 0$, on obtient

$$\|\Omega(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\Omega(0)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \exp\left[\frac{C^p}{p\nu^{p-1}}\int_0^t \|u(\tau)\|^p_{L^q(\mathbb{R}^d)} d\tau\right]. \qquad \square$$

Théorème 3.3.2. *Soit T un réel strictement positif. Soit u une solution faible de l'équation d'Euler sur $[0,T]\times\mathbb{T}^2$*

$$\begin{cases} \partial_t u + \nabla\cdot(u\otimes u) = -\nabla p \\ \nabla\cdot u = 0 \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

et supposons que $\omega = \nabla\wedge u \in L^2([0,T]\times\mathbb{T}^2)$.

Alors $u \equiv 0$ sur $[0,T]\times\mathbb{T}^2$.

Démonstration. Soit u une solution faible des équations de Navier Stokes.

$$\begin{cases} \partial_t u + \nabla\cdot(u\otimes u) - \nu\Delta u = -\nabla_p \\ \nabla\cdot u = 0. \end{cases} \tag{3.55}$$

$\square$

L'équation des tourbillons associée à (3.55) est

$$\begin{cases} \partial_t \omega + \nabla\cdot(u\omega) = 0, \\ \operatorname{div} u = 0, \\ \omega(0) = 0. \end{cases}$$

L'hypothèse sur ω implique que $u \in L^2(\mathbb{R}_+, \dot{H}^1(\mathbb{T}^2))$. En appliquant le théorème 3.1.1, avec $q = q' = p = p' = 2$ et $\nu = 0$, on a $\omega \equiv 0$ et par suite $u \equiv 0$ Ce qui achève la preuve.

CHAPITRE 4

CONCLUSION

Dans les articles, [Lév20] et [Lév16], Guillaume Levy a montré que les équations de transport ont une propriété d'unicité, même en présence de viscosité et de coefficient peu régulier dans une classe de fonction peu régulières. Cette propriété d'unicité lui a permis de donner une nouvelle preuve au célèbre théorème de Serrin. Il a aussi montré que la solution nulle des équations d'Euler sur le tore de dimension 2 est unique. Mieux ce théorème tient lorsqu'on remplace le tore par tout l'espace. Sa preuve repose sur le principe du maximum pour l'équation adjointe et la méthode de dualité.

CHAPITRE 5

PERSPECTIVES

Il faut noter que Guillaume Levy n'a pas complètement étendu le théorème originel de Diperna-Lions, car il n'a pas prouvé l'existence de solutions dans les classes d'unicité. Il serait donc intéressant d'essayer de montrer que la solution existe dans la classe d'unicité.

D'autre part, l'argument avancé par l'auteur ne permet pas d'obtenir l'estimation dans le théorème 3.2.2, on peut essayer de voir comment corriger l'erreur ou comment la contourner.

ANNEXE A

ANNEXE

A.1 Existence de solution

Considérons le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t \varphi - \nabla \cdot (v\varphi) - \Delta \varphi = 0, \\ \varphi(0) = \varphi_0, \end{cases} \tag{A.1}$$

où v est un champ de vecteur de divergence nulle , $v \in W^{m,\infty}(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi_0 \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$.

Dans cette section, nous allons montrer que (A.1) admet une unique solution dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$. Pour ce faire, ils auront à montrer quelques résultats pour pouvoir appliquer le théorème de point fixe de Banach.

Lemme A.1.1. *Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, W^{m,p}(\mathbb{R}^d))$, l'équation*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = \operatorname{div}(v\varphi), \\ u(0) = \varphi_0, \end{cases} \tag{A.2}$$

admet une unique solution dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, W^{m,p}(\mathbb{R}^d))$.

Démonstration. Il s'agit d'une équation de la chaleur avec second membre. La condition initiale $\varphi_0 \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$. Le corollaire 2.1.4 et le Théorème 2.1.11 de [Caz19], nous assure en particulier que si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, W^{m,p}(\mathbb{R}^d))$ et $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, W^{m,p}(\mathbb{R}^d))$ alors il existe une unique solution dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, W^{m,p}(\mathbb{R}^d))$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = f, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Dans notre cas, $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, W^{m,p}(\mathbb{R}^d))$ et $v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, W^{m,\infty}(\mathbb{R}^d))$ donc a priori $\operatorname{div}(v\varphi)$ n'appartient pas à $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, W^{m,p}(\mathbb{R}^d))$. L'inégalité 2.1.33 de la même référence donne en particulier que

$$\|u(t)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|u_0\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} + \int_0^t \|f(s)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} ds.$$

Donc l'hypothèse $v \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, W^{m,\infty}(\mathbb{R}^d))$, nous assure l'existence de $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, W^{m,p}(\mathbb{R}^d))$ solution de (A.2) et donnée par la formule de Duhamel,

$$u(t) = \mathcal{T}(t)\varphi_0 + \int_0^t \mathcal{T}(t-s) \operatorname{div}(v\varphi)(s) ds,$$

où $(\mathcal{T}(t))_{t\geqslant 0}$ est le semi-groupe de la chaleur. □

Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, W^{m,p}(\mathbb{R}^d))$ soit $\Phi(\varphi)$ l'unique solution donnée par A.1.1. On définit ainsi une application $\Phi\colon \varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, W^{m,p}(\mathbb{R}^d)) \mapsto \Phi(\varphi) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, W^{m,p}(\mathbb{R}^d))$ telle que $\Phi(\varphi)$ soit l'unique solution de (A.2).

Lemme A.1.2. *Il existe une constante $C > 0$ dépendant de $\|v\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)}$ telle que*

$$\forall \varphi \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d), \quad \forall t > 0, \quad \|\mathcal{T}(t)\operatorname{div}(v\varphi)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \leqslant Ct^{-\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration. D'une part, $\forall \varphi \in L^p(\mathbb{R}^d), \quad \forall t \geqslant 0$, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}(t)\operatorname{div}(v\varphi) = G_t * \operatorname{div}(v\varphi) = G_t * \sum_{j=1}^{N} \partial_j (v_j\varphi) = \sum_{j=1}^{N} G_t * \partial_j (v_j\varphi) = \sum_{j=1}^{N} \partial_j G_t * (v_j\varphi) \\ = \nabla G_t * (v\varphi)\end{aligned}$$

où G_t désigne le noyau de la chaleur. Ainsi donc

$$\begin{aligned}\|\mathcal{T}(t)\operatorname{div}(v\varphi)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|\nabla G_t * (v\varphi)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\nabla G_t\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\|v\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \\ \leqslant \|\nabla G_t\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N)}\|\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}\|\nabla G_t\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \frac{(4\pi t)^{-\frac{N}{2}}}{2t}\int_{\mathbb{R}^N} |x| e^{-\frac{|x|^2}{4t}}\,dx = \frac{(4\pi t)^{-\frac{N}{2}}}{2t}\int_{\mathbb{R}_+\times S} r e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{N-1} dr d\sigma_S \\ = \frac{(4\pi t)^{-\frac{N}{2}}}{2t}\sigma_S(S)\int_{\mathbb{R}_+} r^N e^{-\frac{r^2}{4t}}\,dr.\end{aligned}$$

En faisant le changement $2u\sqrt{t} = r$, on obtient

$$\|\nabla G_t\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \frac{(4\pi t)^{-\frac{N}{2}}}{2t}(2\sqrt{t})^{N+1}\sigma_S(S)\int_{\mathbb{R}^3} r^N e^{-r^2}\,dr.$$

En posant

$$C = \pi^{-\frac{N}{2}}\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^N)}\sigma_S(S)\int_{\mathbb{R}^N} r^N e^{-r^2}\,dr,$$

on obtient

$$\|\mathcal{T}(t)\operatorname{div}(vu)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant Ct^{-\frac{1}{2}}\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}. \tag{A.3}$$

Maintenant soit $\varphi \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{T}(t)\nabla\cdot(v\varphi)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} &= \sum_{\alpha,|\alpha|\leqslant m} \|\partial^\alpha\left(\mathcal{T}(t)\nabla\cdot(v\varphi)\right)\|_{L^p} \\
&= \sum_{\alpha,|\alpha|\leqslant m} \|G_t * \nabla\cdot\left(\partial^\alpha\left(v\varphi\right)\right)\|_{L^p} \\
&= \sum_{\alpha,|\alpha|\leqslant m} \|G_t * \nabla\cdot \sum_{\beta,|\beta|\leqslant|\alpha|} C_\alpha^\beta \partial^{\alpha-\beta} v \partial^\beta \varphi\|_{L^p} \\
&\leqslant \sum_{\alpha,|\alpha|\leqslant m} \sum_{\beta,|\beta|\leqslant|\alpha|} C_\alpha^\beta \|G_t * \nabla\cdot\left(\partial^{\alpha-\beta} v \partial^\beta \varphi\right)\|_{L^p} \\
&\overset{A.3}{\leqslant} \sum_{\alpha,|\alpha|\leqslant m} \sum_{\beta,|\beta|\leqslant|\alpha|} \frac{C_{\alpha-\beta}(v)}{\sqrt{t}} \|\partial^\beta\varphi\|_{L^p} \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{t}} \sup_{|\alpha|\leqslant m} C_\alpha \sum_{\alpha,|\alpha|\leqslant m} \sum_{\beta,|\beta|\leqslant|\alpha|} \|\partial^\beta\varphi\|_{L^p} \\
&\leqslant C t^{-\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)}
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve du lemme. □

Lemme A.1.3. *Il existe une fonction $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ croissante et une constante $K \geq 0$ telles que la condition*

$$\forall t \geq 0, \quad \|\varphi(t)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \leq \|\varphi_0\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} K g(t) \tag{A.4}$$

pour φ entraîne de même pour $\Phi(\varphi)$.

Démonstration. $\forall \varphi \in C(\mathbb{R}_+, W^{m,p}(\mathbb{R}^d))$ tel que (A.4) ait lieu, on a :

$$\begin{aligned}
\|\Phi(\varphi)(t)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \|\mathcal{T}(t)\varphi_0\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} + \int_0^t \|\mathcal{T}(t-s)\,\mathrm{div}(v\varphi)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} ds \\
&\leqslant \|\varphi_0\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \left(1 + C\int_0^t \frac{Kg(s)}{\sqrt{t-s}} ds\right).
\end{aligned}$$

Pour que $\Phi(u)$ satisfasse (A.4), il suffit donc que

$$1 + C\int_0^t \frac{Kg(s)}{\sqrt{t-s}} ds \leqslant Kg(t).$$

Cherchons $\alpha > 0$ et $K \geq 0$ pour que $g(t) = e^{\alpha t}$ convienne. On a :

$$\begin{aligned}
e^{-\alpha t}\int_0^t \frac{e^{\alpha s}}{\sqrt{t-s}} ds = \int_0^t \frac{e^{-\alpha(t-s)}}{\sqrt{t-s}} ds = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^{\alpha t} \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} ds \leqslant \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_0^\infty \frac{e^{-s}}{\sqrt{s}} ds \\
= \sqrt{\frac{2}{\alpha}}\int_0^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} du = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$1 + CK\int_0^t \frac{g(s)}{\sqrt{t-s}} ds \leqslant 1 + CK\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} g(t).$$

On peut choisir $K = \dfrac{1}{2C}\sqrt{\dfrac{\alpha}{\pi}}$ et α grand pour que $K \geqslant \dfrac{3}{2}$. Puisque $g(t) > 1$ alors

$$1 + CK\int_0^t \frac{g(s)}{\sqrt{t-s}} ds \leqslant 1 + \frac{g(t)}{2} \leqslant \frac{3}{2} g(t) \leqslant Kg(t)$$

□

On peut également choisir $\alpha = 4\pi C^2$ et $K \geqslant 2$. Dans ce cas α dépend implicitement de v.

Lemme A.1.4. *Il existe une fonction* $h\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *et* $\kappa \in [0,1)$ *tels que, si* u *et* w *vérifient* (A.4) *alors*

$$\forall t \geqslant 0, \quad \|u(t)-w(t)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \leqslant h(t) \implies \forall t \geqslant 0, \quad \|\Phi(u)(t)-\Phi(w)(t)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \kappa h(t) \tag{A.5}$$

Démonstration. $\forall u,\, w \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, W^{m,p}(\mathbb{R}^d))$, on a :

$$\|\Phi(u)(t)-\Phi(w)(t)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}}\|u(s)-w(s)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)}ds \leqslant C\int_0^t \frac{h(s)}{\sqrt{t-s}}ds.$$

Soit $\beta > 0$. Comme dans la preuve du lemme A.1.3, on a :

$$e^{-\beta t}\int_0^t \frac{e^{\beta s}}{\sqrt{t-s}}ds \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{\beta}}.$$

En prenant $h(t) = e^{\beta t}$, on a :

$$C\int_0^t \frac{h(s)}{\sqrt{t-s}}ds = Ch(t)e^{-\beta t}\int_0^t \frac{e^{\beta s}}{\sqrt{t-s}}ds \leqslant Ch(t)\sqrt{\frac{\pi}{\beta}}.$$

On prend simplement $\beta = 4\pi C^2$ et on a : $\kappa = \dfrac{1}{2}$

Ce qui achève la preuve. □

Considérons l'ensemble

$$E = \{u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, W^{m,p}(\mathbb{R}^d)) \mid \sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-\beta t}\|u(t)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} < \infty\}.$$

qu'on munit de la norme

$$\forall u \in E, \quad \|u\|_E = \sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-\beta t}\|u(t)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)}.$$

Proposition A.1.1. E *est un sous espace vectoriel de* $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, W^{m,p}(\mathbb{R}^d))$ *et complet pour la norme définie ci-dessus.*

Démonstration. Il est évident que E est un sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, W^{m,p}(\mathbb{R}^d))$.

Soit $(u_i)_i$ une suite de Cauchy de E et $\varepsilon > 0$. Il existe N_ε tel que $\forall i, j \geq N_\varepsilon$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} e^{-\beta t}\|u_i(t)-u_j(t)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon$$

$$\forall t \geq 0 \quad \|u_i(t)-u_j(t)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon e^{\beta t}.$$

Pour tout $t \geq 0$, $(u_i(t))_i$ est donc une suite de Cauchy dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$ qui est complet alors la suite $(u_i(t))_i$ converge vers un élément $u(t) \in W^{m,p}(\mathbb{R}^d)$.

Soit maintenant $i \geq N_\varepsilon$ $\forall r \geq 0$ on a :

$$e^{-\beta t}\|u_i(t)-u(t)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \leqslant e^{-\beta t}\|u_i(t)-u_{i+r}(t)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} + e^{-\beta t}\|u_{i+r}(t)-u(t)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)}.$$

En tendant r vers l'infini, on a : $\|u_{i+r}(t)-u(t)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon e^{\beta t}$. Ainsi

$$e^{-\beta t}\|u_i(t)-u(t)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\varepsilon$$

i.e

$$\|u_i - u\|_E \xrightarrow{i\to\infty} 0.$$

Il reste à montrer que $u \in E$. Soit $t_0, t \geq 0$ et $i \in \mathbb{N}$, on a :

$$\|u(t)-u(t_0)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|u(t)-u_i(t)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} + \|u_i(t)-u_i(t_0)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} + \|u_i(t_0)-u(t_0)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)}$$

Soit $i_0 > 0$ tel que $\|u - u_{i_0}\|_E \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$, comme $u_{i_0} \in E$ alors il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+ \cap]t_0 - \rho, t_0 + \rho[$, $\|u_{i_0}(t) - u_{i_0}(t_0)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$. Ainsi ,

$$\forall t \in \mathbb{R}_+ \cap]t_0 - \rho, t_0 + \rho[, \quad \|u(t) - u(t_0)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon.$$

Par ailleurs, pour $\varepsilon = 1$, on sait qu'il existe $i_0 > 0$ tel que $\|u - u_{i_0}\|_E \leqslant 1$. Ainsi

$$\|u\|_E \leqslant \|u - u_{i_0}\|_E + \|u_{i_0}\|_E \leqslant 1 + \|u_{i_0}\|_E < \infty$$

On conclut donc que la suite $(u_i)_i$ converges dans E. En conséquence $(E, \|\cdot\|_E)$ est complet.□

Remarque A.1.1. *On a envie de dire que Φ envoie E dans lui-même, mais en se référant à A.1.3 on constate plutôt sur la boule $\bar{E} = B(0, K\|\varphi_0\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)})$ heureusement que c'est un fermé de E donc complet.*

Lemme A.1.5. *L'application Φ est contractante sur $\bar{E}$.*

Démonstration. Soit u et w dans $\bar{E}$. On a :

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t) - \Phi(w)(t)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} &\leqslant C \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} \|u(s) - w(s)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} ds \\
&\leqslant C \int_0^t \frac{e^{\beta s}}{\sqrt{t-s}} e^{-\beta s} \|u(s) - w(s)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} ds \\
&\leqslant C \int_0^t \frac{e^{\beta s}}{\sqrt{t-s}} \|u - w\|_E ds.
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
e^{-\beta t}\|\Phi(u)(t) - \Phi(w)(t)\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)} &\leqslant C\|u - w\|_E \int_0^t \frac{e^{-\beta(t-s)}}{\sqrt{t-s}} ds \\
&\leqslant C\sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \|u - w\|_E = \kappa \|u - w\|_E.
\end{aligned}$$

C'est-à-dire

$$\|\Phi(u) - \Phi(w)\|_E \leqslant \kappa \|u - w\|_E.$$

On conclut donc que Φ est contractante sur $\bar{E}$. □

Maintenant, on a obtenu que Φ est contractante sur $\bar{E}$, complet, donc elle admet un unique point fixe φ qui vérifie

$$\varphi(t) = \mathcal{T}(t)\varphi_0 + \int_0^t \mathcal{T}(t-s) \operatorname{div}(v\varphi) ds. \tag{A.6}$$

Le point fixe φ est donc solution de (A.1) et on a : $\|\varphi\|_E \leqslant K\|\varphi_0\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^d)}$.

Par l'équation, on a

$$\partial_t \varphi = v \cdot \nabla\varphi + \Delta\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, W^{m-2,p})$$

On a donc $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, W^{m-2,p})$.

A.2 Espaces de Sobolev

Nous présentons dans cette section les espaces de Sobolev homogènes. On peut se référer [Gal05] et [DR15]

Définiton A.2.1 (Espaces de Sobolev). *Soit $s \in \mathbb{R}$ On dit qu'une distribution u sur $\mathbb{R}^d$ appartient à l'espace $H^s(\mathbb{R}^d)$ si u est une distribution tempérée et*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi < \infty.$$

Pour tous $u, v \in H^s(\mathbb{R}^d)$ on pose

$$\langle u, v\rangle_s = \int_{\mathbb{R}^d} \left(1+|\xi|^2\right)^s |\widehat{u}(\xi)||\widehat{v}(\xi)| d\xi. \tag{A.7}$$

$\langle\cdot,\cdot\rangle_s$ ainsi définit est un produit scalaire sur $H^s(\mathbb{R}^d)$. L'application $u \to (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\,\widehat{u}$ devient une bijection isométrique de $H^s(\mathbb{R}^d)$ sur $L^2(\mathbb{R}^d)$ lorsqu'on munit $H^s(\mathbb{R}^d)$ de la norme associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_s$. $H^s(\mathbb{R}^d)$ est donc en particulier un espace complet.

Définiton A.2.2 (Espace de Sobolev homogène). *Soit $|s| < \dfrac{d}{2}$. On définit l'espace de Sobolev homogène $\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$ comme étant la fermeture de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, munie de la norme de la norme*

$$\|u\|^2_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)} = \int_{R^d} |\xi|^{2s}|\widehat{u}|^2 d\xi$$

équivalente à la norme associée au produit scalaire (A.7)

Théorème A.2.1 (Injection de Sobolev). *Soit s un nombre réel positif.*

— *Si $s > \dfrac{d}{2}$ alors $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini.*

— *Si $0 \leqslant s < \dfrac{d}{2}$, soit l'exposant critique p_c défini par*

$$-s + \frac{d}{2} = \frac{d}{p_c} \ \ i.e\ p_c = \frac{2d}{d-2s} \in [2, +\infty[. \tag{A.8}$$

Alors pour tout $p \in [2, p_c]$, $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $L^p(\mathbb{R}^d)$:

$$\exists C_{p,s} > 0 \text{ tel que } \forall f \in H^s(\mathbb{R}^d), \quad \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{p,s}\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^d)}$$

— *Pour $s = \dfrac{d}{2}$, $H^s(\mathbb{R}^d)$ s'injecte continûment dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour tout $2 \leqslant p < \infty$*

Lemme A.2.1 (Injection de Sobolev homogène). *Soit $0 < s < \dfrac{d}{2}$ et l'exposant critique p_c donné en* (A.8)*. Alors*

$$\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad \|f\|_{L^{p_c}(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_s\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}$$

BIBLIOGRAPHIE

[AC08] Luigi Ambrosio and Gianluca Crippa. Existence, uniqueness, stability and differentiability properties of the flow associated to weakly differentiable vector fields. In *Transport equations and multi-D hyperbolic conservation laws*, volume 5 of *Lect. Notes Unione Mat. Ital.*, pages 3–57. Springer, Berlin, 2008.

[BdLSV19] Tristan Buckmaster, Camillo de Lellis, László Székelyhidi, Jr., and Vlad Vicol. Onsager's conjecture for admissible weak solutions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 72(2) :229–274, 2019.

[BJ98] F. Bouchut and F. James. One-dimensional transport equations with discontinuous coefficients. *Nonlinear Anal.*, 32(7) :891–933, 1998.

[BJ99] François Bouchut and François James. Duality solutions for pressureless gases, monotone scalar conservation laws, and uniqueness. *Comm. Partial Differential Equations*, 24(11-12) :2173–2189, 1999.

[BJM05] Francois Bouchut, Francois James, and Simona Mancini. Uniqueness and weak stability for multi-dimensional transport equations with one-sided Lipschitz coefficient. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 4(1) :1–25, 2005.

[Bre10] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* Springer Science & Business Media, 2010.

[Caz19] Thierry Cazenave. Introduction to partial differential equations, october 2019.

[CKN82] L. Caffarelli, R. Kohn, and L. Nirenberg. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 35(6) :771–831, 1982.

[CZ16] Jean-Yves Chemin and Ping Zhang. On the critical one component regularity for 3-D Navier-Stokes systems. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 49(1) :131–167, 2016.

[Dep03] Nicolas Depauw. Non unicité des solutions bornées pour un champ de vecteurs bv en dehors d'un hyperplan. *Comptes Rendus Mathematique*, 337(4) :249–252, 2003.

[DL89] R. J. DiPerna and P.-L. Lions. Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces. *Invent. Math.*, 98(3) :511–547, 1989.

[DR15] Raphaël Danchin and Pierre Raphaël. Solitons, dispersion et explosion une introduction à l'étude des ondes non linéaires. 2015.

[Dro01] Jérôme Droniou. Intégration et espaces de sobolev à valeurs vectorielles., 2001.

[Gal05] Sadek Gala. Opérateurs de multiplication ponctuelle entre espace de sobolev. *These Evry*, 2005.

[L.04] Ambrosio L. Transport equation and cauchy problem for bvvector fields. *Invent Math*, 2004.

[LBL08] C. Le Bris and P.-L. Lions. Existence and uniqueness of solutions to Fokker-Planck type equations with irregular coefficients. *Comm. Partial Differential Equations*, 33(7-9) :1272–1317, 2008.

[Ler04] Nicolas Lerner. Transport equations with partially *bv* velocities. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*, 3(4) :681–703, 2004.

[Lév16] Guillaume Lévy. On uniqueness for a rough transport–diffusion equation. *Comptes Rendus Mathematique*, 354(8) :804–807, 2016.

[Lév20] Guillaume Lévy. A uniqueness lemma with applications to regularization and incompressible fluid mechanics. *Sci China. Math*, 63 :1–14, 2020.

[LFX93] Philippe Le Floch and Zhouping Xin. Uniqueness via the adjoint problems for systems of conservation laws. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 46(11) :1499–1533, 1993.

[Slmd34] Leray Sur le mouvement d'un. liquide visqueux remplissant l'espace. *Acta mathematica*, 63 :193–248, 1934.